УДК 531
Р27

Р е ц е н з е н т
д-р техн. наук, проф. *К.Л. Косырев*
(председатель НМСН *Металлургия*)

Рахштадт Ю.А.
Р27 Физика: Физические основы механики: Учеб. пособие. Ч. 1. – М.: Изд. Дом МИСиС, 2009. – 174 с.

Учебное пособие состоит из пяти частей, соответствующих пяти разделам курса физики. В первой части «Физические основы механики» описываются свойства пространства и времени, даются основные понятия механики и фундаментальные законы движения.

Предназначено для студентов очной и заочной форм обучения по направлению «Металлургия».

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие 5
Введение 6
Глава 1. Пространство и время.....................................10
1.1. Пространство...10
1.2. Время 10
1.3. Движение в пространстве и во времени 10
1.4. Принцип относительности Галилея..............................13
1.5. Закон сложения скоростей 13
1.6. Закон распространения света.....................................15
1.7. Принцип относительности Эйнштейна 15
1.8. Преобразования Лоренца..16
1.9. Относительность одновременности 17
1.10. Релятивистский закон сложения скоростей 18
1.11. Измерение времени 18
Контрольные вопросы 23
Примеры решения задач..23
Глава 2. Кинематика 25
2.1. Модели в механике 25
2.2. Степени свободы 26
2.3. Описание поступательного движения 27
2.4. Скорость поступательного движения (линейная скорость) 30
2.5. Ускорение поступательного движения (линейное ускорение).......31
2.6. Интегрирование уравнений поступательного движения 34
2.7. Особенности описания криволинейного движения 38
2.8. Описание простого вращения а.т.т. (осевого вращения) 40
2.9. Угловая скорость..42
2.10. Угловое ускорение 43
2.11. Интегрирование уравнений вращательного движения 44
2.12. Взаимосвязь линейных и угловых характеристик движения......47
Контрольные вопросы 47
Примеры решения задач..48
Глава 3. Законы сохранения 59
3.1. Свойства пространства – времени и законы сохранения........59
3.2. Сохранение импульса 60

3.3. Сохранение момента импульса 68
3.4. Сохранение энергии..81
3.5. Законы сохранения как принципы запрета 88
Контрольные вопросы 89
Примеры решения задач..90
Глава 4. Силы в природе 98
4.1. Понятие силы 98
4.2. Классификация сил 98
4.3. Потенциальные (консервативные) силы 99
4.4. Примеры расчетов внутренних сил 101
4.5. Момент силы 103
4.6. Работа 105
4.7. Мощность сил 107
4.8. Законы динамики 108
4.9. Релятивистский закон динамики материальной точки 112
4.10. Основной закон динамики в неинерциальных
системах отсчета 114
Контрольные вопросы 123
Примеры решения задач..124
Домашние задания...134
Приложение 160
Библиографический список...162

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящее пособие соответствует программе курса физики, читаемого на кафедре физики МИСиС. Оно призвано помочь студентам освоить теоретический курс, выработать навыки решения задач и подготовиться к экзаменам, выполнению домашних заданий и контрольных работ.

Учебное пособие состоит из пяти частей, соответствующих пяти разделам курса физики.

В части 1 «Физические основы механики» большое внимание уделяется свойствам пространства и времени, даются основные понятия механики и такие фундаментальные законы движения как законы сохранения и законы динамики.

В части 2 «Молекулярная физика и термодинамика» излагаются основы статистической физики и термодинамики, даются основные закономерности явлений переноса, рассматриваются основные законы термодинамики, понятие энтропии.

В части 3 «Силовые поля» рассматриваются свойства гравитационного и электромагнитного поля с точки зрения современных физических представлений, методы расчетов силовых полей, движение частиц в силовых полях, поведение проводников, диэлектриков и магнетиков в электромагнитном поле.

В части 4 «Колебания и волны» подчеркивается общность закономерностей колебательных и волновых процессов различной физической природы. Изучаются поляризация и дисперсия света. Рассматриваются такие волновые явления как интерференция и дифракция.

В части 5 «Кванты. Строение и физические свойства вещества» описываются корпускулярные свойства света и волновые свойства микрочастиц вещества, строение атома, электронное строение кристаллов и их электрические свойства, физическая электроника (полупроводниковые приборы и лазеры), а также субатомное вещество.

Пособие содержит контрольные вопросы и примеры решения задач, а также домашние задания по большинству тем во всех разделах курса. При решении домашних задач студентам следует обратить внимание на графики, рисунки или векторные диаграммы; уравнения соответствующих физических законов; особое внимание нужно обратить на формулы и уравнения, содержащие векторные величины.

Предназначено для студентов очной и заочной форм обучения по направлению «Металлургия».

ВВЕДЕНИЕ

Естествознание есть совокупность наук об основных свойствах материи, о видах материи, которые входят в состав любых сложных материальных систем; о взаимодействиях этих видов материи и их движении. Понятие «материя» выражает признание объективной реальности мира и является предельно широким понятием, охватывая все известные (и пока неизвестные) формы проявления материи в неживой природе – от звезд до элементарных частиц, в живой природе – от неклеточных форм до человека, а также в материальной жизни общества. Естественные науки имеют в качестве предмета своего изучения различные формы проявления материи в живой и неживой природе.

Физика (от греч. φύσις – природа) представляет собой в широком смысле слова науку о природе, т.е. естествознание. Вплоть до XVII века физика и изучала природу в целом. По мере накопления фактического материала с необходимостью произошла дифференциация: из физики как общей науки о природе («натуральной философии» по Ньютону) выделились такие частные науки, как астрономия, механика, химия и т.д. На современном этапе продолжается дальнейший процесс разделения физики: возникли био-, гео-, астрофизика, химическая физика и т.п. (разумеется, «границы» между ними, как и во всякой классификации, являются условными).

С той поры физика изучает лишь неживую природу. Современная физика исследует два основных вида материи: 1) *вещество* в виде элементарных частиц, ядер, атомов, молекул, твердых, жидких и газообразных тел, плазмы, вакуума; 2) *поле* – электромагнитное, гравитационное, ядерное. Физика изучает наиболее общие формы существования материи – пространство и время, а также наиболее общие формы ее движения (механическое, волновое, квантовое движения и другие, возможно еще не открытые).

К особым видам материи относят и физический вакуум. Современная физика допускает возможность возникновения вещества из вакуума: гравитационное поле черной дыры может рождать из вакуума частицы. При этом подразумевается, что вакуум – это особое состояние материи. Например, вакуум электромагнитного поля – такое его состояние, в котором нет фотонов. Отсутствует вещество, так существует поле, нет поля – есть его физический вакуум. «Пустого» пространства не существует в природе. Пространство без материи не существует, ибо оно – одна из форм бытия материи.

Сущность физического подхода при анализе сложных явлений природы состоит в выделении главных, существенных факторов и отбрасывании второстепенных, т.е. построении абстрагированной физической модели явления.

На основе физической модели устанавливаются количественные связи между различными физическими величинами – физические законы. Они имеют, как правило, лишь приближенный смысл и ограниченную сферу применения (так называемые частные законы – Ома, Гука и т.п.); лишь очень небольшое число законов (например, закон сохранения энергии) соблюдается во всех явлениях – такие законы называются *фундаментальными*.

Физика является наукой экспериментальной и все свои законы строит на основе систематического и планомерного накопления и тщательной обработки анализа наблюдений (правда, история физики богата и «случайными» открытиями, логически подготовленными всем ходом развития физики – рентгеновские лучи, радиоактивность и т.п.). Поэтому неудивительно, что физические законы и основанные на них теории не имеют абсолютного смысла, а являются лишь ступенями к познанию объективной истины (например, развитие механики от Аристотеля к Галилею и Ньютону и далее к Эйнштейну). Это не значит, разумеется, что «старые» законы неверны – они лишь обнаруживают границы своей применимости по мере усовершенствования средств наблюдения в общего технического прогресса, расширяющего доступный диапазон физических величин.

Физика является точной наукой, так как данные измерений представляются в виде чисел, и любая оценка имеет смысл, если указан масштаб сравнения; кроме того, все физические выводы записываются в виде формул, отсюда неразрывная связь физики с математикой. Как писал Эйнштейн, физика есть та часть естествознания, которая может быть выражена языком математических формул. В ряде случаев чисто математические следствия, вытекающие из формулировки физических законов, приводят к предсказанию новых физических фактов, позднее проверяемых в эксперименте (например, открытие ряда планет, элементарных частиц и т.п.).

Процесс дифференциации естественных наук по предмету исследования диалектически неизбежно сопровождается процессом их интеграции по методу исследования: он все в большей степени становится физическим как с точки зрения мощных экспериментальных средств, так и с точки зрения широкого применения физического подхода в ранее полуописательных науках (например, расшифровка генетического кода в биологии с помощью ренггеноструктурного анализа ДНК).

На современном уровне развития наук о природе можно считать, что физика опять становится общей наукой о природе, ядром и лидером естествознания. Можно сказать и иначе: поскольку формы материи, движения и взаимодействия встречаются в любых материальных системах (в живой и неживой природе), физика, благодаря прогрессирующей интеграции естественных наук, является основой естествознания. Именно то, что объекты физического познания, которые сами относятся к различным уровням организации материи, входят в той или иной степени в состав любых сложных материальных систем, обуславливает особую роль физики относительно других наук.

* * *

О целях физики и физиков А. Эйнштейн говорил: «Если говорить честно, мы хотим не только знать, как устроена природа,... но и, по возможности, достичь цели утопической и дерзкой на вид – узнать, почему природа является именно такой. В этом учении находят наивысшее удовлетворение. В этом состоит прометеевский элемент научного творчества».

Механика – раздел физики, в котором изучается механическое движение материальных тел и проходящие при этом взаимодействия между ними. Наиболее простой формой движения материи является *механическое движение.* Под механическим движением понимают изменение с течением времени взаимного расположения тел или их частей в пространстве. Рассматриваемые в механике взаимодействия представляют собой те действия тел друг на друга, результатом которых является изменение состояния движения этих тел или их деформация. Сами взаимодействия описываются законами, получаемыми опытным путем и находящими обоснования в других разделах физики.

Механическое движение, происходящее со скоростью, значительно меньшей скорости света в вакууме ($c = 3 \cdot 10^8$ м/с), описывается *механикой Галилея – Ньютона*. Движение со скоростями v, близкими к скорости света, есть предмет *релятивистской механики*, базирующейся на *специальной теории относительности Эйнштейна*. По современным представлениям механика Галилея – Ньютона и механика Эйнштейна представляют собой *классическую механику*. *Квантовая механика* изучает движение частиц в микромире. Как будет показано ниже, механика Галилея – Ньютона есть предельный случай релятивистской механики при $v \ll c$ и предельный случай квантовой механики при $\hbar \to 0$ (где $\hbar$ – постоянная Планка).

Механическое движение, как и движение материи в целом, происходит в *пространстве* и во *времени*. Поэтому в первую очередь необходимо ознакомиться с их свойствами.

Глава 1. ПРОСТРАНСТВО И ВРЕМЯ

1.1. Пространство

Пространство *– совокупность отношений, выражающих взаимное расположение объектов: расстояние и ориентацию.*

Свойства пространства, свободного от силовых полей:

1. *Трехмерность*, т.е. место события описывается тремя числами (координатами).

2. *Плоскостность*, т.е. подчинение *геометрии Евклида*.

3. *Однородность*, т.е. пространство инвариантно по отношению к параллельному переносу (все точки пространства равноправны).

4. *Изотропность*, т.е. пространство инвариантно по отношению к повороту (все направления равноправны).

5. *Непрерывность* – вплоть до 10^{-18} м (затем пространство становится дискретным, или «зернистым»); квант пространства (предположительно) равен 10^{-35} м.

1.2. Время

Время *– совокупность отношений, выражающих последовательность и длительность событий.*

Свойства времени:

1. *Одномерность*, т.е. момент события описывается одним числом.

2. *Однородность*, т.е. одно и то же событие развивается одинаково, начинаясь в разные моменты времени.

3. *Анизотропность*, т.е. для времени характерно выделенное направление – «стрела времени»: все события развиваются от прошлого через настоящее к будущему.

4. *Непрерывность* – вплоть до 10^{-23} с; квант времени (предположительно) равен 10^{-43} с.

1.3. Движение в пространстве и во времени

Любое движение (в том числе и *механическое*), как и вообще *любое изменение*, – относительно.

Можно говорить о перемещении тел в аудитории, в вагоне поезда, в космосе, вообще можно говорить лишь о взаимном перемещении тел. Про одно и то же тело можно сказать: движется прямолинейно, покоится, движется криволинейно и т.д., и все суждения будут верны, но с разных точек зрения. Ясно, что состояние движения или покоя нельзя рассматривать безотносительно. Состояние движения тел можно описывать только по отношению к какому-нибудь другому телу (или совокупности тел), в частности, по отношению к наблюдателю. *Для описания механического движения необходима искусственная система отсчета, так как пространство изотропное и однородное, а время – однородное.*

Тело (совокупность тел), по отношению к которому описывается движение данного тела, называется *телом отсчета*. Относительно тела отсчета производятся все измерения, определяются скорость, форма траектории и т.д.

Под *системой отсчета* (СО) мы понимаем *систему координат*, связанную с телом отсчета и служащую для указания положения тела в пространстве, вместе с часами, служащими для указания времени.

Систем отсчета бесконечно много. Понятно, что нет никаких логических причин, которые позволили бы предпочесть одну СО другой. Например, автомобиль как СО ничем не хуже аудитории.

В зависимости от конкретной цели описания движения мы можем движение автомобиля рассматривать, например, относительно дороги, движение частей автомобиля относительно его центра и т.д.

Однако выбор СО является весьма глубокой физической проблемой. Дело в том, что не только картина движения, но и сами свойства движения – т.е. законы движения тел – изменяются при переходе из одной СО в другую. Для пассажиров парохода в качку закон движения незакрепленных тел состоит в том, что эти тела могут в любое время начать движение в любом направлении с любой скоростью. В аудитории же тело начнет двигаться только при приложении силы. Получается, что в различных СО действуют разные физические законы, и для однозначного описания движения и, вообще говоря, всех явлений природы необходимо придерживаться одной избранной СО, причем законы будут иметь только местное значение для данной СО.

Оказывается, однако, что существует класс таких СО, для которых все физические законы имеют совершенно одинаковый вид, или, как принято говорить в физике, являются инвариантными относительно перехода из одной СО в другую. Такие СО называются *инерциальными системами отсчета* (ИСО). Их название происходят от того, что во всех ИСО выполняется, в частности, *первый закон Ньютона – закон инерции.*

Если найдется хотя бы одна ИСО, то существует и бесконечное множество других ИСО – таковыми будут любые СО, которые или покоятся или движутся равномерно и прямолинейно относительно данной ИСО без каких-либо вращений.

С какими же реальными телами отсчета можно связывать ИСО?

Установилось соглашение говорить об ИСО, связанных с «неподвижными» звездами, которые не имеют ускорения, точнее, современные приборы не зафиксировали ускорения «неподвижных» звезд. Другие СО будем связывать с телами, все точки которых будут двигаться относительно этих звезд по прямолинейным траекториям с постоянной скоростью. Величина и направление скорости могут быть произвольны. Мы получим бесконечное множество ИСО. Опыт показывает, что в инерциальных системах отсчета все законы движения одинаковы и имеют наиболее простой вид. Например, в ИСО простейшее механическое движение – прямолинейное и равномерное – предстает равномерным и прямолинейным движением.

Отсюда следует, в частности, что все ИСО неразличимы. Наблюдатель внутри ИСО никаким опытом не сможет установить, движется ли эта СО относительно другой ИСО и какова скорость ее движения (человек не может ощущать состояние равномерного движения). Так, например, нельзя установить, движется ли в пространстве СО, связанная с «неподвижными» звездами.

Примерами инерциальных систем могут служить *геоцентрическая* система (связанная с Землей) и *гелиоцентрическая* (связанная с Солнцем). Ускорение Земли в собственном вращении $a_n = 3{,}4\cdot 10^{-2}$ м/с^2; $a_\tau = 6\cdot 10^{-2}$ м/с^2; угловая скорость Земли в собственном вращении $\omega \sim 10^{-4}$ с$^{-1}$, а угловая скорость Земли в орбитальном движении $\omega \sim 10^{-7}$ с$^{-1}$, т.е. Земля, строго говоря, не является инерциальной системой отсчета. Солнце с большей точностью можно принять за ИСО, так как тангенциальное ускорение Солнца относительно центра Галактики очень мало: $a_\tau \sim 10^{-10}$ м/с^2 .

Все СО, движущиеся по земной поверхности прямолинейно и равномерно, будут являться ИСО с тем же приближением, что и сама Земля (автомобиль, поезд и т.д.).

Системы отсчета, которые движутся ускоренно по отношению к ИСО, называются *неинерциальными* системами отсчета.

В дальнейшем основные понятия механики будут рассмотрены именно в *инерциальной* системе отсчета, связанной с Землей или с наблюдателем, т.е. в так называемой *лабораторной* системе отсчета. Однако в каждом конкретном случае необходимо уточнение ИСО, в которой описывается тот или иной физический процесс.

1.4. Принцип относительности Галилея

Принцип относительности Галилея гласит, что все *механические* явления в инерциальных системах отсчета протекают одинаково при скоростях намного меньших скорости света в вакууме (законы динамики одинаковы во всех ИСО). Время – *инвариантно* относительно *преобразований Галилея.*

Преобразования Галилея. Если инерциальные системы отсчета $\boxed{\text{К}}$ и $\boxed{\text{К}'}$ движутся относительно друг друга вдоль оси абсцисс со скоростью $\vec{\mathrm{v}}$ (рис. 1.1), то

$$
\begin{aligned}
t &= t', \\
x &= x' + \mathrm{v}_x\, t, \\
y &= y'.
\end{aligned} \qquad (1.1)
$$

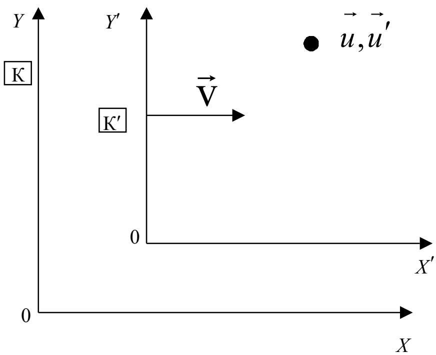


Рис. 1.1. Относительное движение инерциальных систем отсчета

1.5. Закон сложения скоростей

Закон сложения скоростей в рамках механики Галилея – Ньютона является следствием преобразований Галилея и имеет вид:

$$\vec{u} = \vec{u}' + \vec{\mathrm{v}} \Rightarrow \left.\begin{matrix} \begin{cases} u_x = u'_x + \mathrm{v}_x, \\ u_y = u'_y + \mathrm{v}_y, \end{cases} \\ |\vec{u}| = \sqrt{u_x^2 + u_y^2}. \end{matrix}\right\} \tag{1.2}$$

Пока существовало убеждение, что все явления природы могут быть описаны с помощью классической механики, можно было не сомневаться в справедливости этого принципа относительности. Однако с новейшим развитием электродинамики и оптики становилось все более очевидным, что одной классической механики недостаточно для полного описания физических явлений. Тем самым вопрос о справедливости принципа относительности Галилея стал весьма спорным.

Рассмотрим следующий пример.

Отнесем процесс распространения света, как и всякий другой процесс, к некоторому твердому телу отсчета. Выберем в качестве такового железнодорожное полотно. Представим, что воздух над этим последним удален. Пусть по рельсам движется со скоростью v вагон (рис.1.2.). Пусть в вагоне вдоль полотна дороги распространяется луч света, скорость которого относительно вагона равна скорости $u' = c$, притом в том же направлении, в котором движется вагон. Возникает вопрос, какова скорость распространения света относительно полотна дороги? Пусть u – искомая скорость света относительно полотна дороги. Тогда, в соответствии с (1.2), имеем

$$u = u' + \mathrm{v} = c + \mathrm{v}.$$

Таким образом, скорость распространения светового луча относительно полотна дороги оказывается больше c (?!).

Но этот результат противоречит изложенному выше принципу относительности. В самом деле, согласно принципу относительности, закон распространения света в пустоте, как и всякий другой закон природы, должен бы быть одинаковым как для полотна железной дороги, принимаемого в качестве тела отсчета, так и для вагона. Но согласно нашим рассуждениям это кажется невозможным.

В связи с этим неизбежным представляется отказ либо от принципа относительности, либо от простого закона распространения света в вакууме.

Тем не менее имеются два общих факта, которые говорят в пользу справедливости принципа относительности. Если классическая механика и не дает достаточно широкой базы для описания всех физических явлений, то в ней все же содержится весьма значительная доля истины; достаточно вспомнить, что она с поразительной отчетливостью описывает реальные движения небесных тел. Поэтому принцип относительности в области механики должен выполняться также с большой точностью. Однако априори маловероятно, чтобы столь общий принцип, выполняющийся с такой точностью в одной области явлений, был неприменим в другой области явлений. Развитие теоретической физики показало, что этот путь неприемлем.

1.6. Закон распространения света

В настоящее время не известен ни один процесс передачи информации со скоростью, превосходящей скорость света в вакууме.

Закон распространения света гласит: *скорость света в вакууме не зависит от скорости движения приемника и источника, а также от направления распространения света в свободном пространстве.*

Глубокие теоретические исследования электродинамических и оптических процессов в движущихся телах, выполненные Г.А. Лоренцом, показали, что опыты в этих областях приводят к необходимости такой теории электромагнитных явлений, неизбежным следствием которой является закон постоянства скорости света в вакууме. Поэтому ведущие теоретики были скорее склонны отказаться от принципа относительности, хотя и не удавалось найти ни одного экспериментального факта, противоречащего этому принципу.

Здесь и выступила на сцену ***теория относительности***. В результате анализа физических понятий ***времени*** и ***пространства*** было показано, что в действительности ***принцип относительности и закон распространения света совместимы*** и что, систематически придерживаясь обоих этих законов, можно построить логически безупречную теорию. Основные положения этой теории, которую, в отличие от ее обобщения, называют ***«специальной теорией относительности»***, будут изложены ниже.

1.7. Принцип относительности[1] Эйнштейна

Принцип относительности Эйнштейна соединяет *принцип относительности Галилея* с *законом распространения света* (принципом предельности и постоянства скорости света).

---

[1] Поскольку по-английски относительность есть *relativity*, то принцип относительности Эйнштейна и связанные с ним преобразования Лоренца, а также уравнения, формулы и физические величины, описывающие движение со скоростями, близкими к скорости света, называются *релятивистскими*.

Принимая во внимание единство материального мира, принцип относительности должен быть применен *ко всем событиям внешнего мира,* т.е. не только законы механики, но и *все законы природы* должны быть одинаковы в системах, движущихся прямолинейно и равномерно друг относительно друга.

Но как все законы природы могут оказаться одинаковыми в системах, движущихся друг относительно друга? Ведь уравнения электромагнитного поля (*уравнения Максвелла)* неинвариантны относительно классического преобразования Галилея. Это ясно обнаруживается на примере скорости света. Согласно преобразованию Галилея, эта скорость не была бы одинаковой в двух СО, движущихся друг относительно друга.

Преобразования Галилея с необходимостью должны быть заменены новыми формулами: *преобразованиями Лоренца*.

1.8. Преобразования Лоренца

Для случая, когда инерциальные системы отсчета $\boxed{\text{К}}$ и $\boxed{\text{К}'}$ движутся относительно друг друга вдоль оси абсцисс со скоростью $|\vec{\mathrm{v}}| \leq c$, координаты и время преобразуются по формулам:

$\boxed{\text{К}'} \to \boxed{\text{К}}$	$\boxed{\text{К}} \to \boxed{\text{К}'}$
$x = \gamma(x' + \mathrm{v}t')$,	$x' = \gamma(x - \mathrm{v}t)$,
$y = y'$,	$y' = y$,
$z = z'$,	$z' = z$,
$t = \gamma\left(t' + \dfrac{x'\mathrm{v}}{c^2}\right)$;	$t' = \gamma\left(t - \dfrac{x\mathrm{v}}{c^2}\right)$.

(1.3)

Здесь $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ – релятивистский фактор;

$\beta = \dfrac{\mathrm{v}}{c}$ – относительная скорость.

Аналогичные преобразования существуют и для бесконечно малых приращений соответствующих величин:

$\boxed{K'} \rightarrow \boxed{K}$	$\boxed{K} \rightarrow \boxed{K'}$	
$dx = \gamma(dx' + v_x dt')$,	$dx' = \gamma(dx - v_x dt)$,	
$dy = dy'$,	$dy' = dy$,	(1.4)
$dz = dz'$,	$dz' = dz$,	
$dt = \gamma\left(dt' + \dfrac{dx'\,v_x}{c^2}\right)$	$dt' = \gamma\left(dt - \dfrac{dx v_x}{c^2}\right)$	

Имея в своем распоряжении преобразования Лоренца, можно выразить сущность *теории* относительности Эйнштейна (принцип относительности Эйнштейна) следующим образом:

Всякий общий закон природы должен быть таким, чтобы сохранять свой вид при замене пространственно-временных переменных x, y, z, t первоначальной системы координат K новыми пространственно-временными переменными x', y', z', t' другой системы координат K'; при этом математическая связь между штрихованными и нештрихованными величинами определяется преобразованиями Лоренца.

Сформулируем это кратко: ***общие законы природы инвариантны относительно преобразований Лоренца.***

Таково математическое условие, которое накладывает на законы природы теория относительности; вследствие этого теория относительности становится ценным эвристическим вспомогательным средством для отыскания общих законов природы. Если бы был найден некоторый общий закон природы, не удовлетворяющий указанному условию, то тем самым было бы отвергнуто по меньшей мере одно из двух основных положений теории.

1.9. Относительность одновременности

У нас были законы преобразования для пространства, но не для времени, потому что по Галилею время было одинаково во всех системах координат. Это означает, что в классических преобразованиях время всегда одно и то же во всех системах. Однако здесь, в теории относительности, оно различно. В преобразованиях Лоренца оно изменяется и ведет себя аналогично координате в старых преобразованиях.

События, одновременные в одной инерциальной системе отсчета, могут не быть таковыми в другой:

поскольку $\Delta t = \gamma\left(\Delta t' + \dfrac{\mathrm{v}_x \Delta x'}{c^2}\right)$,

то при $\Delta t' = 0$ интервал Δt может быть отличным от нуля.

1.10. Релятивистский закон сложения скоростей

Поскольку $u_x = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ и $u'_x = \dfrac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t'}$, то можно вывести формулы для преобразования скоростей:

$$\vec{u} = \frac{\vec{u}' + \vec{\mathrm{v}}}{1 + \dfrac{u'_x \mathrm{v}_x}{c^2}}, \qquad u_x = \frac{u'_x + \mathrm{v}_x}{1 + \dfrac{u'_x \mathrm{v}_x}{c^2}}, \qquad u_{y(z)} = \frac{u'_{y(z)}\sqrt{1-\beta^2}}{1 + \dfrac{u'_x \mathrm{v}_x}{c^2}}. \quad (1.5)$$

Можно показать, что уравнения Максвелла, т.е. законы электромагнитного поля, инвариантны по отношению к преобразованиям Лоренца, подобно тому, как законы механики инвариантны по отношению к классическим преобразованиям.

1.11. Измерение времени

Для измерения времени используются часы – какое-либо физическое явление, которое может быть воспроизведено любое необходимое количество раз. Это является исключительно важным в связи с признанием справедливости закона распространения света.

Свойства часов:

1. Часов должно быть много: момент события должен наблюдаться по часам, расположенным вблизи события (учитывая конечность скорости света).

2. Часы должны быть синхронизированы, т.е. в одной точке пространства одновременно показывать одинаковое время. Или, например, часы A и B (рис. 1.3) синхронизированы, если $t_A = t_B + \dfrac{S}{c}$;

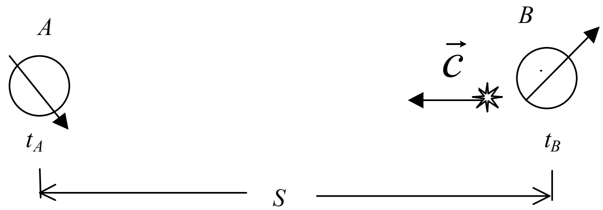


Рис. 1.3. Синхронизация часов

3. События могут считаться одновременными, если синхронизированные часы, установленные вблизи них, показывают одинаковое время в момент самого события.

4. В соответствии с преобразованиями Лоренца каждая система координат должна быть снабжена собственными часами, покоящимися в ней, так как движение часов изменяет темп их хода: темп хода часов в инерциальных системах отсчета зависит от скорости их движения относительно неподвижного наблюдателя (рис. 1.4).

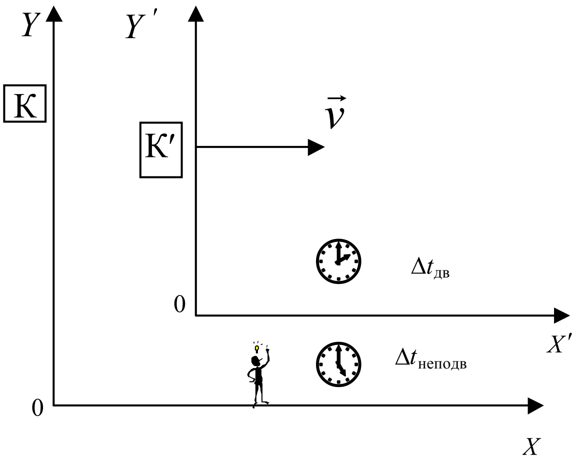


Рис. 1.4. Измерение времени

$$\Delta t_{дв} = \Delta t_{неподв}\sqrt{1-\beta^2}\ . \tag{1.6}$$

Для неподвижного наблюдателя движущиеся часы замедляют свой темп хода.

5. Парадокс близнецов (парадокс часов).

Те, кто следит за программой исследований космоса, могли обратить внимание на то, что космические путешественники будут стареть не так быстро, как их собратья на Земле. Но поскольку реальная скорость космического путешественника $\left(\mathrm{v}/c\right) \ll 1$, этот эффект будет пренебрежимо мал. Однако если бы космический путешественник мог двигаться со скоростью света, то он не старел бы вообще. С точки зрения наблюдателя на Земле, ход часов и всех физических процессов (включая саму жизнь) в космическом корабле, движущемся со скоростью v, замедлился бы в $\left(\sqrt{1-\beta^2}\right)$ раз [см. соотношение (1.6)].

Однако мы сталкиваемся с кажущимся ***парадоксом***, когда космический путешественник, глядя на Землю, замечает отставание земных часов по сравнению с его собственными (рис.1.5.). На первый взгляд близнец-*космонавт* должен был бы получить результат, согласно которому близнец-*землянин* будет моложе близнеца-*космонавта*, что противоречит предшествующему рассуждению[2]. Действительно, если движение и скорость в самом деле относительны, то как вообще мы могли прийти к несимметричному результату для обоих близнецов? Разве из соображений симметрии не ясно, что оба близнеца должны иметь один возраст в конце путешествия? На первый взгляд кажется, что теория Эйнштейна приводит к противоречию.

6. Темп хода часов замедляется в полях тяготения.

Парадокс устраняется, если заметить, что проблеме присуща *внутренняя асимметрия.* Близнец-*землянин* всегда остается в одной и той же ***инерциальной*** системе отсчета, тогда как близнец-*космонавт*, поворачивая обратно к Земле, переходит в ***неинерциальную*** систему отсчета (рис.1.6.).

Парадокс близнецов (называемый также парадоксом часов) имеет долгую историю. Теперь почти всех физиков устраивает рассмотренная здесь интерпретация.

Эффекты замедления времени пренебрежимо малы, если космический корабль не достиг кинетической энергии, соизмеримой с его

[2] Мы рассматриваем задачу с **генетическими** близнецами.

энергией покоя, Даже энергия, высвобождающаяся при реакциях деления или синтеза ядер, все еще в 1000 раз меньше необходимой для проявления этого эффекта. Человечество пока не имеет возможности использовать эффект замедления времени в практическом плане для совершения далеких путешествий к звездам.

Парадокс близнецов был подтвержден в ряде экспериментов.

В одном из них кристалл железа в мёссбауэровских часах нагревался и проводилось сравнение с холодными часами. Атомы железа в нагретом кристалле движутся значительно быстрее, чем в холодном образце, где атомы практически покоятся, Два тождественных ядра железа, находящиеся при одинаковых температурах, испускают излучение одной и той же частоты.

Второе подтверждение было получено с использованием макроскопических часов вместо отдельных атомов железа. Наиболее точные макроскопические часы — это атомные часы на пучке цезия. Действительно, эти часы «тикают» 9192631770 раз в секунду. В течение октября 1971 г. было проведено сравнение двух таких часов, причем одни из них находились в полете вокруг Земли на обычных реактивных лайнерах, а другие оставались в военно-морской обсерватории США. В соответствии с предсказаниями теории относительности путешествующие в авиалайнерах часы должны были отстать от покоящихся на (184 + 23) нс. Наблюдаемое отставание составило (203 + 10) нс. Очевидно, эксперимент согласуется с теорией в пределах ошибок измерения. Эти результаты были опубликованы 14 июля 1972 г. в журнале «Science».

Опыты 1976 г. показали, что *при увеличении притяжения* атомные часы *отставали* на 59 нс (по теории – на 49 нс); *при уменьшении притяжения* – *спешили* на 273 нс (по теории – на 275 нс).

Как следует из теории, при приближении к Земле на каждые 10 м темп хода часов замедляется на 10^{-15} с.

Заключение. До сих пор при изложении механики мы предполагали, что все скорости значительно меньше скорости света, которая была обозначена нами через c. Теперь, после того как мы достаточно подробно осветили содержание механики, настало время объяснить причину ограничения скоростями: $v \ll c$.

Попросту говоря, причина эта в том, что механика Ньютона оказалась лишь приближением к релятивистской механике, справедливым в области $v \ll c$.

Иногда спрашивают, стоит ли заниматься релятивистской механикой, если большинство встречающихся в повседневной жизни скоростей значительно меньше скорости света? Стоит! И для этого существует несколько причин:

1. Одной из главных задач физики является изучение свойств света, для которого $v = c$.

2. Теория света выводится из теории электромагнетизма. Такие важные понятия этой теории, как магнитное поле и электромагнитная индукция, существенно связаны со скоростью света. Правильно было бы сказать, что электромагнетизм – это *релятивистская* теория. Поэтому, прежде чем по-настоящему понять явление магнетизма, следует разобраться в теории относительности.

3. В ядерной физике и физике элементарных частиц мы встречаемся с частицами, которые движутся со скоростями, близкими или равными скорости света.

4. В современной астрономии приходится непрерывно сталкиваться с релятивизмом. Удаленные галактики движутся со скоростями, близкими к скорости света. Природа недавно открытых физических объектов, таких как нейтронные звезды, пульсары и черные дыры, существенно связана с релятивистскими эффектами.

5. Для углубления нашего понимания квантовой механики необходимо рассмотреть такие явления как фотоэффект и эффект Комптона, а для этого нужны релятивистские соотношения между энергией, массой и импульсом.

6. Мы видим, что теория относительности «противоречит» здравому смыслу и повседневному опыту. Поэтому при первом знакомстве с ней трудно поверить, что она может оказаться правильной. Однако с философской точки зрения важно тщательно исследовать данную ситуацию. Даже сегодня можно встретить образованных людей, не признающих всех выводов теории относительности. Это первый пример явлений природы, очевидным образом «противоречащих» здравому смыслу.

7. Большинство людей знакомо с такими вещами, как соотношение $E = mc^2$, замедление времени, лоренцево сокращение, парадокс близнецов, а также с тем, что ни одна частица или сигнал не могут распространяться быстрее света. В эпоху научно-технической революции эти факты становятся частью нашей общей культуры.

Контрольные вопросы

1. Какие принципы лежат в основе специальной теории относительности?

2. От каких постулатов, положенных в основу классической механики Галилея – Ньютона, отказывается специальная теория относительности?

3. Как выглядела бы теория относительности, если бы скорость света была бесконечно большой?

4. Как связаны друг с другом преобразования Галилея и преобразования Лоренца?

5. Законы классической или релятивистской механики лежат в основе расчетов движения космических кораблей и элементарных частиц в космических лучах?

6. Какие вы знаете инвариантные величины?

7. Что характерно для частиц с нулевой массой покоя?

Примеры решения задач

Пример 1.1. Две релятивистские частицы движутся под прямым углом друг к другу в лабораторной системе отсчета (рис. 1.7), причем одна со скоростью v = 0,6·*c*, а другая со скоростью *u* = 0,8·*c*. Найдите их относительную скорость *u'*.

Решение

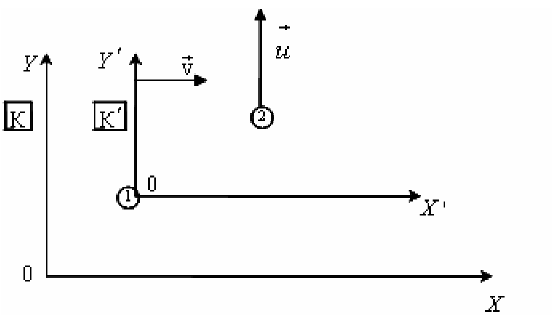


Рис. 1.7

Пусть первая частица движется относительно лабораторной СО $\boxed{\text{К}}$ со скоростью $\vec{v}$ вдоль оси *OX*, а вторая частица движется относительно СО $\boxed{\text{К}}$ со скоростью $\vec{u}$ вдоль оси *OY*. С первой частицей свяжем СО $\boxed{\text{К'}}$. Тогда искомая относительная скорость обеих частиц будет равна скорости $\vec{u}'$, с которой вторая частица движется относительно СО $\boxed{\text{К}'}$.

Из релятивистских формул сложения скоростей (1.5), выраженных через проекции скоростей, следует, что

$$\left.\begin{aligned} u'_x &= \frac{u_x - \text{v}_x}{1 - \frac{u_x \text{v}_x}{c^2}}, \\ u'_y &= \frac{u_y \sqrt{1-\beta^2}}{1 - \frac{u_x \text{v}_x}{c^2}}, \end{aligned}\right\}$$

(если относительная скорость движения обеих СО направлена вдоль оси OX). Поскольку скорости $\vec{\text{v}}$ и $\vec{u}$ взаимно перпендикулярны, модуль скорости $\vec{u}'$ выразим через проекции:

$$u' = \sqrt{\left(u'_x\right)^2 + \left(u'_y\right)^2}\,.$$

Из условий задачи запишем

$$u_x = 0.$$

Тогда система уравнений (1.7) преобразуется:

$$\left.\begin{aligned} u'_x &= -\text{v}, \\ u'_y &= u\sqrt{1-\beta^2}. \end{aligned}\right\}$$

Итак, в соответствии с формулой (1.8), скорость движения второй частицы относительно первой будет равна

$$u' = \sqrt{\left(-\text{v}\right)^2 + u^2\left(1-\beta^2\right)}\,.$$

Подставим в (1.10) числовые значения и выполним вычисления:

$$u' = \sqrt{\left(0{,}6\cdot c\right)^2 + \left(0{,}8\cdot c\right)^2\left(1 - \frac{\left(0{,}6\cdot c\right)^2}{c^2}\right)} = 0{,}877\cdot c =$$

$$= 2{,}63\cdot 10^8 \text{ м/с}.$$

Глава 2. КИНЕМАТИКА

Предмет кинематики. Кинематика изучает движение тел – ускорение, скорость, кинематические уравнения движения и форму траектории, не интересуясь причинами, обуславливающими это движение.

2.1. Модели в механике

Выбрав систему отсчета и связав с ней систему координат, можно определить положение любой точки любого тела или самого тела в целом в любой момент времени, т.е. траекторию движения.

Описать движение реального тела – значит задать уравнения движения каждой его точки. Ясно, что для реального тела таких уравнений должно быть бесконечное множество. Поэтому реальное тело заменяют той или иной *механической моделью*.

Для описания механического движения используют следующие модели:

– материальная точка (м.т.);

– абсолютно твердое тело (а.т.т);

– сплошная среда.

Материальная точка – это тело, размерами и формой которого можно пренебречь в условиях данной задачи. М.т. заменяет движение реального тела движением одной любой из его точек. Движение других точек тела не рассматривается. Эта модель применима при пренебрежимо малых размерах тела по сравнению с расстояниями до других тел или расстояниями, пройденными телом. Рассматривая реальное тело как м.т., пренебрегают перемещением отдельных его частей, вращательным движением тела и т.д.

Например, изучая движение Земли вокруг Солнца, и Землю, и Солнце можно считать материальными точками, поскольку размеры Земли и Солнца весьма малы по сравнению с расстоянием между центрами Солнца и Земли. С другой стороны, при изучении вращения Земли вокруг своей оси представление о Земле как о м.т. неправильно.

Совокупность нескольких тел, каждое из которых можно считать м.т., называют *системой м.т.* Например, нашу Галактику можно представить как систему очень большого числа материальных точек – звезд.

Другая модель механики – *абсолютно твердое тело*. Абсолютно твердое тело имеет одинаковые с реальным телом размеры и форму, но отличается абсолютной жесткостью. Все размеры тела неизменны. Мы пренебрегаем деформациями, не учитываем колебательных движений в теле.

В случае, когда нельзя не учитывать деформаций и перемещений частей тела, применяется модель *сплошной среды*. В сплошной среде существенную роль играют внутренние перемещения в теле. В нашем курсе мы изучаем механику м.т. и а.т.т. Эти модели требуют для описания своего движения задания конечного и небольшого числа кинематических уравнений движения.

2.2. Степени свободы

Для выяснения областей применения и сущности механических моделей пользуются понятием *степеней свободы*. Число уравнений движения, необходимое и достаточное для описания движения какой-либо системы м.т. или а.т.т., принято называть *числом степеней свободы* этой системы. Эти уравнения должны описывать движение системы вполне однозначно, но среди них не должно быть уравнений, являющихся следствием других.

Движение м.т. в пространстве определяется тремя кинематическими уравнениями движения (2.2), т.е. м.т. имеет $i = 3$ степени свободы (рис.2.1.). Система N м.т., не связанных друг с другом, имеет $i = 3N$ степеней свободы. Если между м.т. имеются жесткие связи (пока мы вообще говорим только о жестких связях), то из $3N$ координат системы не все будут независимыми – число степеней свободы этой системы будет меньше $3N$. Можно показать, что число степеней свободы i меньше $3N$ как раз на число f этих независимых жестких связей:

$$i = 3N - f. \tag{2.1}$$

Сколько степеней свободы у а.т.т.? Для определения положения твердого тела в пространстве достаточно задать положение трех любых точек этого тела, не лежащих на одной прямой (рис.2.2.), т.е. задать положение произвольного треугольника, жестко связанного с а.т.т., тогда девять координат определяют положение этих точек. Но три из них не являются независимыми, так как могут быть определены из фиксированных значений расстояний между этими точками. Поэтому, чтобы задать положение а.т.т., нужно всего шесть независимых координат, а чтобы описать движение а.т.т., необходимо и достаточно написать шесть уравнений движения: твердое тело имеет $i = 6$ степеней свободы.

Для того чтобы описывать все возможные перемещения в системе м.т. и а.т.т., нужно знать виды этих перемещений, т.е. виды движения м.т. и а.т.т. Рассмотрим основные виды движения: *поступательное* и *вращательное.*

2.3. Описание поступательного движения

Поступательным называется такое движение а.т.т., при котором все точки его совершают одинаковые перемещения, т.е. описывают одинаковые по форме и протяженности траектории (говорят, что все точки тела описывают *конгруэнтные* траектории – траектории, совпадающие при наложении). В этом случае любая прямая, проведенная в теле, движется параллельно самой себе.

Для описания поступательного движения а.т.т. достаточно задать уравнения движения одной из его точек. Движение любой другой точки может быть получено параллельным переносом (все расстояния в твердом теле фиксированы). При поступательном движении твердое тело движется как материальная точка, т.е. имеет три степени свободы. Для описания поступательного движения тел используется модель м.т. Уравнения движения тела записываются в случае поступательного движения разными способами.

2.3.1. Координатное описание

В случае использования декартовой системы координат положение любой точки тела определяется координатами: абсциссой x, ординатой y и аппликатой z, которые при движении тела будут являться функциями времени:

$$\left.\begin{aligned} x &= x(t), \\ y &= y(t), \\ z &= z(t). \end{aligned}\right\} \tag{2.2}$$

Функции времени, определяемые формулами (2.2), называются *кинематическими уравнениями движения* данной точки *в координатной форме*.

Если из кинематических уравнений движения (2.2), заданных в *координатной форме*, исключить время t, то мы получим *уравнение траектории* движения тела, т.е. решим главную задачу кинематики.

Траектория – пространственная линия, описываемая уравнениями:

а) в трехмерном пространстве $L(x,y,z) = 0$,

б) на плоскости $y = y(x)$.

В каждой точке **A** траектории в трехмерном пространстве задаются шесть чисел – три координаты и три проекции скорости (импульса) (рис.2.3).

2.3.2. Векторное описание

При поступательном движении тела (т.е. движения м.т.) можно использовать понятие радиуса-вектора $\vec{r}$. Тогда координаты м.т. x, y, z можно рассматривать как проекции вектора $\vec{r}$ на оси координат.

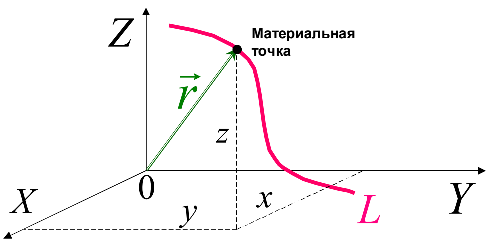


Рис. 2.4. Векторное описание движения материальной точки

При движении м.т. конец вектора $\vec{r}$ скользит по траектории (рис. 2.4), т.е. радиус-вектор изменяет свое направление и величину (модуль):

$$\vec{r} = \vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}. \qquad (2.3)$$

Уравнение (2.3) *есть кинематическое уравнение движения в векторной форме.*

Модуль радиуса-вектора равен

$$|\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \ . \tag{2.4}$$

Уравнение (2.3) эквивалентно уравнениям (2.2), но более компактно. Заметим, что в классической механике постулируется непрерывность как координат, так и времени; тем самым постулируется непрерывность функции:

$$\vec{r} = \vec{r}(t) \tag{2.5}$$

На рис. 2.5 вектор $\Delta\vec{r}$ дает нам перемещение м.т. за время Δt, его не надо путать с *длиной пути* S, скалярной величиной, отсчитанной вдоль траектории движения м.т. Полное перемещение равно *геометрической* (т.е. *векторной*) сумме отдельных перемещений точки, а полная длина пути равна *арифметической* (*скалярной*) сумме длин отдельных перемещений, взятых вдоль траектории.

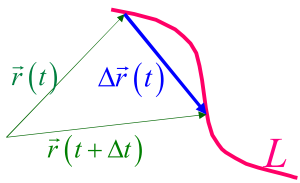


Рис. 2.5. Вектор линейного перемещения $\Delta\vec{r}(t)$

Вектор

$$\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t) = \Delta\vec{r}(t) \tag{2.6}$$

называется *вектором линейного перемещения* точки. Здесь Δt – промежуток времени, в течение которого происходит это перемещение.

2.3.3. Траекторное описание

В этом случае задается уравнение траектории и закон движения по ней

$$S = S(t). \tag{2.7}$$

Знание закона изменения величины пути $S(t)$ позволит найти положение тела в любой момент времени, если знать направление движения по этой траектории (рис.2.6).

2.4. Скорость поступательного движения (линейная скорость)

В физике понятие *скорости* вводится для характеристики быстроты изменения какой-либо физической величины. Движение м.т. и а.т.т. и их систем наряду с координатами характеризуется *скоростью*. Скорость – это векторная физическая величина, которая показывает быстроту и направление движения тела.

Рассмотрим скорость *поступательного* движения м.т., так называемую *линейную* скорость движения.

2.4.1. Векторное описание движения

Линейная скорость (*средняя скорость перемещения*) (рис. 2.7) определяется по формуле

$$\langle \vec{v} \rangle = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}. \tag{2.8}$$

Линейной скоростью м.т. (*мгновенной*) в любой момент времени при поступательном движении называется предел, к которому стремится отношение изменения линейного перемещения $\Delta \vec{r}$ за промежуток времени Δt к этому промежутку при беспредельном уменьшении последнего:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}. \tag{2.9}$$

Вектор линейной скорости направлен по касательной к траектории в данной точке и равен

$$\vec{v} = |\vec{v}|\,\vec{\tau},$$

где $\vec{\tau}$ – тангенциальный (касательный) орт.

Модуль вектора линейной скорости

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}. \tag{2.10}$$

2.4.2. Координатное описание движения

В проекциях на оси координат линейная скорость (мгновенная) может быть выражена так:

$$\vec{\mathrm{v}} = \vec{\mathrm{v}}_x + \vec{\mathrm{v}}_y + \vec{\mathrm{v}}_z = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\vec{i} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\vec{j} + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\vec{k} = \mathrm{v}_x\vec{i} + \mathrm{v}_y\vec{j} + \mathrm{v}_z\vec{k}, \quad (2.11)$$

где v_{x}, v_{y} и v_{z} – проекции скорости.

Зная три проекции скорости (или три проекции импульса см. 3.2.4) и три координаты м.т., мы можем полностью описать движение, ибо именно эти шесть чисел характеризуют – в широком смысле слова – траекторию движения м.т.

2.4.3. Траекторное описание движения

При траекторном описании движения линейная скорость (мгновенная) есть быстрота изменения пути и равна

$$\mathrm{v} = \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}, \quad (2.12)$$

это арифметическое значение скорости, т.е. скалярная величина (например, показание спидометра).

2.5. Ускорение поступательного движения (линейное ускорение)

При движении м.т. ее скорость, вообще говоря, может меняться как по величине, так и по направлению. Векторы $\vec{\mathrm{v}}_1$ и $\vec{\mathrm{v}}_2$ изображают скорость м.т. в моменты времени t_1 и t_2 соответственно (рис. 2.8).

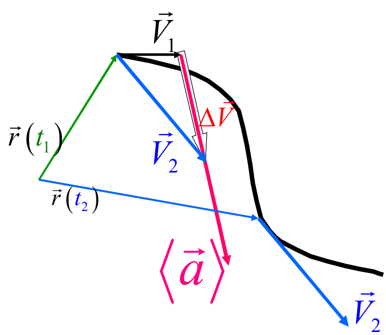


Рис. 2.8. Изменение скорости $\Delta\vec{\mathrm{v}}$. Среднее ускорение $\langle\vec{a}\rangle$

Изменение скорости есть вектор

$$\Delta\vec{\mathrm{v}} = \vec{\mathrm{v}}_2 - \vec{\mathrm{v}}_1,$$

выражающий изменение скорости движения за время $\Delta t = t_2 - t_1$.

Ускорение – это векторная физическая величина, которая показывает быстроту изменения скорости как по модулю, так и по направлению.

2.5.1. Векторное описание движения

Линейное ускорение (среднее) определяется по формуле

$$\langle \vec{a} \rangle = \frac{\Delta\vec{\mathrm{v}}}{\Delta t}. \tag{2.13}$$

где $\Delta\vec{\mathrm{v}} = \vec{\mathrm{v}}_2 - \vec{\mathrm{v}}_1$ – вектор изменения линейной скорости (см. рис. 2.3);

Δt – промежуток времени, в течение которого происходит это изменение.

Направление вектора среднего ускорения совпадает с направлением $\Delta\vec{\mathrm{v}}$.

Линейным ускорением м.т. (*мгновенным*) в любой момент времени при поступательном движении называется предел, к которому стремится отношение изменения линейной скорости $\Delta\vec{\mathrm{v}}$ за промежуток времени Δt к этому промежутку при беспредельном уменьшении последнего:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{\mathrm{v}}}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\vec{\mathrm{v}}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2} \tag{2.14}$$

Модуль вектора линейного ускорения равен

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}. \tag{2.15}$$

Направление вектора линейного ускорения $\vec{a}$ не совпадает в общем случае с направлением скорости $\vec{\mathrm{v}}$ (за исключением случая *прямолинейного* движения).

Координатное описание движения

В проекциях на оси координат линейное ускорение может быть выражено так:

$$\vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y + \vec{a}_z = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k} =$$
$$= \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}\vec{i} + \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}\vec{j} + \frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}\vec{k} = \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\vec{i} + \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\vec{j} + \frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}\vec{k}, \qquad (2.16)$$

где $a_{x,}$ a_y и a_z – проекции ускорения.

2.5.3. Траекторное описание движения

При *траекторном* описании движения линейное ускорение равно

$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2S}{\mathrm{d}t^2}. \qquad (2.17)$$

2.5.4. Движение ускоренное, замедленное и равномерное

Движение называется *ускоренным*, если величина скорости движения увеличивается со временем. При этом угол α между $\vec{a}$ и $\vec{v}$ находится в пределах $0 \le \alpha < 90°$ (рис. 2.9).

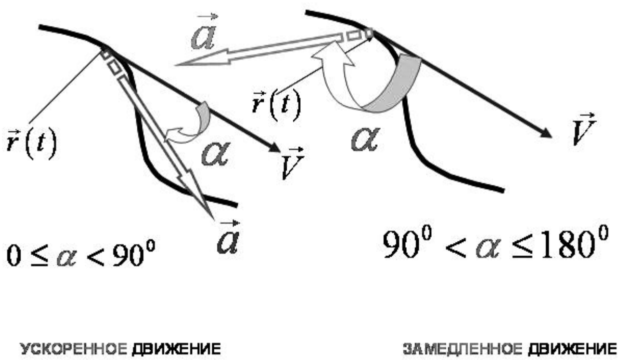


Рис. 2.9. Вектор мгновенного ускорения при ускоренном и замедленном движениях м.т.

В случае прямолинейного движения м.т. вдоль, например, оси X при ускоренном движении векторы $\vec{a}$ и $\vec{v}$ совпадают по направлению, а их проекции a_x и v_x соответственно имеют одинаковые знаки.

Движение называется *замедленным,* если величина скорости движения уменьшается со временем. При этом угол α между $\vec{a}$ и $\vec{v}$ находится в пределах $90° < \alpha \le 180°$ (см. рис. 2.9).

В случае прямолинейного движения м.т. вдоль, например, оси X при замедленном движении векторы $\vec{a}$ и $\vec{v}$ противоположны по направлению, а их проекции a_x и v_x соответственно имеют противоположные знаки.

При угле $\alpha = 90°$ материальная точка участвует в равномерном движении по окружности (рис. 2.10):

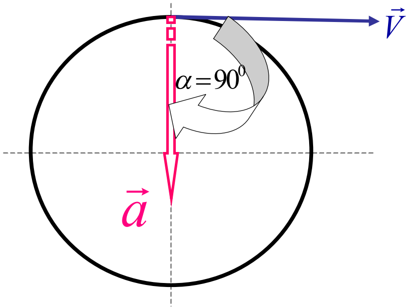


Рис. 2.10. Вектор мгновенного ускорения при равномерном движении м.т. по окружности

2.6. Интегрирование уравнений поступательного движения

2.6.1.Уравнения в координатной форме

Если известен вид уравнений зависимости проекций ускорения (2.16) от времени, то, проинтегрировав их по времени, мы получим уравнения зависимости проекций скорости движения от времени:

$$\left.\begin{aligned} v_x(t) &= \int a_x(t)\,\mathrm{d}t + C_1, \\ v_y(t) &= \int a_y(t)\,\mathrm{d}t + C_2, \\ v_z(t) &= \int a_z(t)\,\mathrm{d}t + C_3. \end{aligned}\right\} \qquad (2.18)$$

Здесь проекция ускорения a_x, например, есть следствие действия сил

$$a_x = \frac{1}{m}\sum F_x \ .$$

Если известна зависимость проекций скорости (2.11) от времени, то, проинтегрировав их по времени, мы получим кинематические уравнения движения в координатной форме:

$$\left.\begin{aligned} x(t) &= \int v_x(t)\,\mathrm{d}t + C_4, \\ y(t) &= \int v_y(t)\,\mathrm{d}t + C_5, \\ z(t) &= \int v_z(t)\,\mathrm{d}t + C_6, \end{aligned}\right\} \qquad (2.19)$$

аналогичные (2.2).

Для того чтобы найти *постоянные интегрирования* C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 и C_6, необходимо знать *начальные условия* движения.

В равнопеременном движении при *координатном* описании движения:

$$\left.\begin{aligned} a_x &= \mathrm{const}, \\ v_x(t) &= v_{0x} + a_x t, \\ x(t) &= x_0 + v_{0x}t + \frac{a_x t^2}{2}. \end{aligned}\right\} \qquad (2.20)$$

Здесь величины x_0 и v_{0x} есть начальные (в момент времени $t = 0$) значения абсциссы и проекции скорости соответственно.

В равномерном движении при *координатном* описании движения:

$$\left.\begin{aligned} a_x &= 0, \\ v_x(t) &= v_{0x} = \mathrm{const}, \\ x(t) &= x_0 + v_{0x}t. \end{aligned}\right\} \qquad (2.21)$$

Здесь величины x_0 и v_{0x} есть начальные (в момент времени $t=0$) значения абсциссы и проекции скорости соответственно.

2.6.2. Уравнения в векторной форме

Если известна зависимость вектора ускорения (2.14) от времени, то, проинтегрировав ее по времени, мы получим уравнение зависимости вектора скорости движения от времени:

$$\vec{\mathrm{v}}(t)=\int \vec{a}(t)\,\mathrm{d}t+C_1. \tag{2.22}$$

Если известна зависимость вектора скорости (2.9) от времени, то, проинтегрировав ее по времени, мы получим кинематическое уравнение движения в векторной форме:

$$\vec{r}(t)=\int \vec{\mathrm{v}}(t)\,\mathrm{d}t+C_2. \tag{2.23}$$

Для того чтобы найти *постоянные интегрирования* C_1 и C_2, необходимо знать *начальные условия* движения.

В равнопеременном движении при *векторном* описании движения

$$\left.\begin{aligned}&\vec{a}=\mathrm{const},\\&\vec{\mathrm{v}}(t)=\vec{\mathrm{v}}_0+\vec{a}t,\\&\vec{r}(t)=\vec{r}_0+\vec{\mathrm{v}}_0t+\frac{\vec{a}t^2}{2}.\end{aligned}\right\} \tag{2.24}$$

В равномерном движении при *векторном* описании движения

$$\left.\begin{aligned}&\vec{a}=0,\\&\vec{\mathrm{v}}(t)=\vec{\mathrm{v}}_0=\mathrm{const},\\&\vec{r}(t)=\vec{r}_0+\vec{\mathrm{v}}_0t.\end{aligned}\right\} \tag{2.25}$$

Здесь векторы $\vec{r}_0$ и $\vec{\mathrm{v}}_0$ есть начальные (в момент времени $t=0$) значения радиуса-вектора и вектора скорости соответственно.

Векторы $\vec{r}$, $\vec{\mathrm{v}}$ и $\vec{a}$, описывающие поступательное движение м.т., есть *полярные* (*линейные)* векторы. Их направление – естественное: оно задается направлением и характером движения.

2.6.3. Уравнения в траекторной форме

При *траекторном* описании движения уравнение зависимости арифметической величины скорости движения от времени мы получим при интегрировании по времени зависимости ускорения (2.17) от времени:

$$\mathrm{v}(t) = \int a(t)\,\mathrm{d}t + C_1. \tag{2.26}$$

Если известна зависимость арифметической величины скорости (2.12) от времени, то, проинтегрировав ее по времени, мы получим кинематическое уравнение движения в траекторной форме, т.е. зависимость пути от времени:

$$S(t) = \int \mathrm{v}(t)\,\mathrm{d}t + C_2. \tag{2.27}$$

Для того чтобы найти *постоянные интегрирования* C_1 и C_2, необходимо знать *начальные условия* движения.

В равнопеременном движении при *траекторном* описании движения:

$$\left.\begin{aligned} &a = \mathrm{const},\\ &\mathrm{v}(t) = \mathrm{v}_0 + at,\\ &S(t) = S_0 + \mathrm{v}_0 t + \frac{at^2}{2}. \end{aligned}\right\} \tag{2.28}$$

Здесь величины S_0 и v_0 есть начальные (в момент времени $t = 0$) значения пути и арифметической величины скорости соответственно.

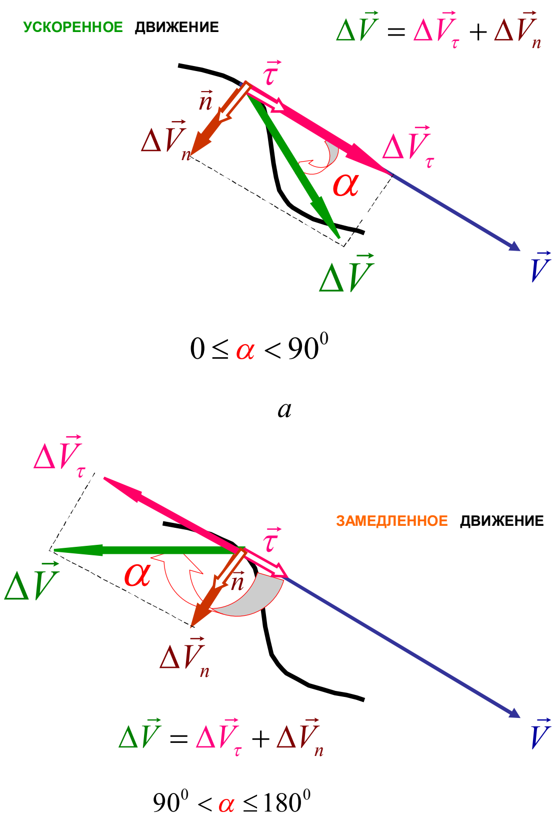
В равномерном движении при *траекторном* описании движения:

$$\left.\begin{aligned} &a = 0,\\ &\mathrm{v}(t) = \mathrm{v}_0 = \mathrm{const},\\ &S(t) = S_0 + \mathrm{v}_0 t. \end{aligned}\right\} \tag{2.29}$$

Здесь величины S_0 и v_0 есть начальные (в момент времени $t = 0$) значения пути и арифметической величины скорости соответственно.

2.7. Особенности описания криволинейного движения

При криволинейном движении вектор изменения скорости $\Delta\vec{v}$ можно разложить на вектор $\Delta\vec{v}_\tau$, направленный по касательной к траектории, и вектор $\Delta\vec{v}_n$, направленный по нормали к траектории (рис. 2.11 и 2.12). На этом рисунке $\vec{\tau}$ – тангенциальный орт, $\vec{n}$ – нормальный орт.



б

Рис. 2.11 и 2.12. Тангенциальная и нормальная составляющие изменения скорости при ускоренном и замедленном движении

Физический смысл тангенциального и нормального ускорений. Так как вектор скорости направлен по касательной к траектории $\vec{\mathrm{v}} = |\vec{\mathrm{v}}|\vec{\tau}$, то вектор ускорения $\vec{a}$ может быть представлен как сумма тангенциальной (касательной) $\vec{a}_{\text{ф}}$ и нормальной $\vec{a}_n$ составляющих (рис. 2.13 и 2.14):

$$\left.\begin{array}{l} \vec{a} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{\mathrm{v}}}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(|\vec{\mathrm{v}}|\vec{\tau}\right) = \vec{\tau}\dfrac{\mathrm{d}|\vec{\mathrm{v}}|}{\mathrm{d}t} + |\vec{\mathrm{v}}|\dfrac{\mathrm{d}\vec{\tau}}{\mathrm{d}t} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n \\ \text{Модуль ускорения равен} \\ |\vec{a}| = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}. \end{array}\right\} \qquad (2.30)$$

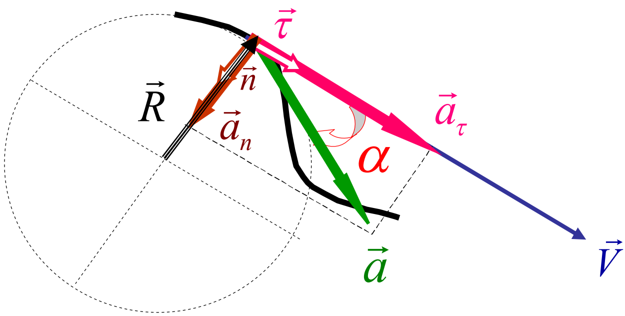
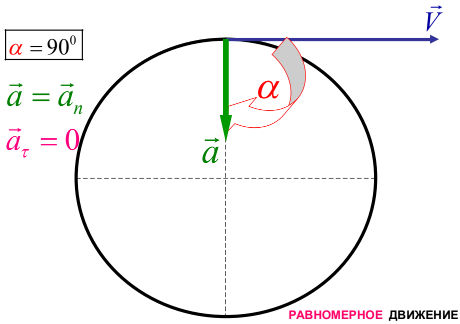


Рис. 2.13. Тангенциальное и нормальное ускорения при ускоренном движении



б

Рис. 2.14. Тангенциальное и нормальное ускорения: при равномерном движении м.т. по окружности

Нормальное ускорение характеризует быстроту изменения скорости по направлению:

$$\vec{a}_n = |\vec{v}|\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \frac{v^2}{R}\vec{n} = -\frac{v^2}{R}\frac{\vec{R}}{R}. \qquad (2.31)$$

Тангенциальное ускорение характеризует быстроту изменения скорости по модулю (табл. 2.1):

$$\vec{a}_\tau = \vec{\tau}\frac{d|\vec{v}|}{dt}. \qquad (2.32)$$

Таблица 2.1

$a_\tau = \frac{d\lvert\vec{v}\rvert}{dt}$	$a_n = \frac{v^2}{R}$	Движение	Траектория
0	0	Равномерное	Прямолинейная
$\neq 0$	0	Переменное	Прямолинейная
0	$\neq 0$	Равномерное	Криволинейная
$\neq 0$	$\neq 0$	Переменное	Криволинейная

2.8. Описание простого вращения а.т.т. (осевого вращения)

Рассмотрим модель абсолютно твердого тела (а.т.т.). *Вращательное* движения а.т.т. подразделяется на *простое* вращательное движение и *общее* вращательное движение.

При *простом вращательном движении* все точки твердого тела описывают окружности в параллельных плоскостях; центры этих окружностей лежат на одной прямой, называемой *осью вращения* (рис. 2.8).

Ось вращения фиксирована. Не следует путать простое *вращательное* движение относительно оси, лежащей вне тела, и *поступательное* движение а.т.т., при котором возможна траектория в виде окружности (*орбита*).

Для описания положения каждой точки а.т.т. при простом вращательном движении достаточно задать одну координату – *угол* φ *поворота* радиуса окружности, по которой двигается точка A. Действительно, при простом вращательном движении все точки тела движутся только в плоскостях, т.е. движение должно описываться двумя уравнениями движения. Но $r = \text{const}$, а угол φ одинаков для всех точек. Твердое тело при этом движении обладает *одной* степенью свободы. Уравнение простого вращательного движения а.т.т. относительно оси z при координатном способе записи

$$\varphi_z = \varphi_z\left(t\right). \qquad (2.33)$$

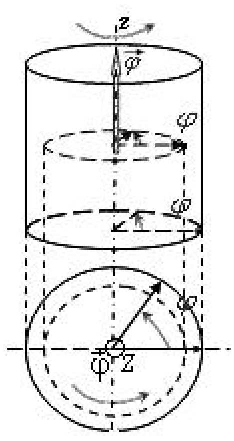


Рис. 2.15. Простое (осевое) вращение а.т.т.
$\vec{\varphi}$ – вектор угла поворота

Это уравнение дает возможность определить угол поворота а.т.т. вокруг оси в любой момент времени, но не дает ответа на вопрос, в каком направлении вращается а.т.т. Вводится *вектор* $\vec{\varphi}$ *угла поворота*, длина которого численно равна углу φ в радианах, а направление совпадает с направлением оси вращения в соответствии с *правилом правого винта* (см. рис. 2.8).

В векторном способе записи уравнение простого вращательного движения а.т.т.:

$$\vec{\varphi} = \vec{\varphi}(t). \qquad (2.34)$$

В общем случае твердое тело может находиться во вращении относительно трех взаимно перпендикулярных осей, пересекающихся в одной точке. Это вращение относительно неподвижной точки, при котором все точки а.т.т. движутся по поверхности концентрических сфер с центрами в фиксированной точке. Такое движение а.т.т. называется *общим вращательным движением*.

2.9. Угловая скорость

Угловую скорость мы рассмотрим на примере простого вращения а.т.т., которое характеризуется вектором углового перемещения $\Delta\vec{\varphi}$, модуль $|\Delta\vec{\varphi}|$ которого численно равен величине изменения угла поворота $\Delta\varphi$ в радианах, а направление совпадает с направлением оси вращения в соответствии с правилом правого винта.

Угловая скорость (средняя) равна

$$\langle\vec{\omega}\rangle = \frac{\Delta\vec{\varphi}}{\Delta t}, \qquad (2.35)$$

где $\Delta\vec{\varphi}$ – вектор углового перемещения;

Δt – промежуток времени, в течение которого происходит это перемещение.

У*гловой скоростью (мгновенной)* а.т.т. в любой момент времени при вращательном движении называется предел, к которому стремится отношение вектора углового перемещения $\Delta\vec{\varphi}$ за промежуток времени Δt к этому промежутку при беспредельном уменьшении последнего:

$$\vec{\omega} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{\varphi}}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\vec{\varphi}}{\mathrm{d}t}. \qquad (2.36)$$

Вектор угловой скорости направлен по оси вращения в соответствии с правилом правого винта (рис. 2.9).

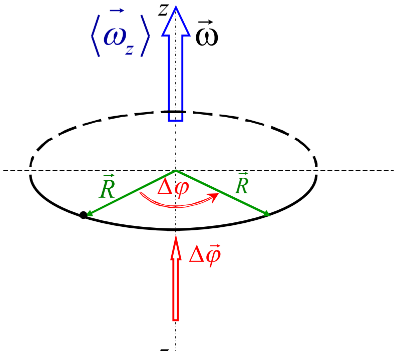


Рис. 2.16. Векторы углового перемещения $\Delta\vec{\varphi}$ и угловой скорости $\vec{\omega}$

2.10. Угловое ускорение

Рассмотрим вращательное движение а.т.т. По аналогии с линейным ускорением угловым ускорением а.т.т. называется векторная физическая величина $\vec{\beta}$, определяющая быстроту изменения угловой скорости.

Угловое ускорение (среднее) определяется по формуле

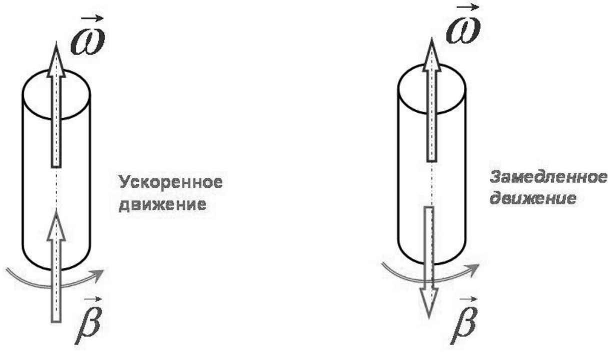
$$\langle \vec{\beta} \rangle = \frac{\Delta\vec{\omega}}{\Delta t}. \quad (2.37)$$

где $\Delta\vec{\omega}$ – изменение угловой скорости.

Угловое ускорение – величина векторная, так как $\Delta\vec{\omega}$ – вектор. Вектор $\vec{\beta}$ углового ускорения совпадает по направлению с вектором $\Delta\vec{\omega}$.

Угловым ускорением (мгновенным) $\vec{\beta}$ а.т.т. в любой момент времени при вращательном движении называется предел, к которому стремится отношение изменения угловой скорости $\Delta\vec{\omega}$ за промежуток времени Δt к этому промежутку при беспредельном уменьшении последнего:

$$\vec{\beta} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{\omega}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d^2\vec{\varphi}}{dt^2}. \qquad (2.38)$$



а *б*

Рис. 2.17. Векторы угловой скорости и углового ускорения при ускоренном (*а*) и замедленном (*б*) вращениях

В соответствии с этим определением при ускоренном вращении векторы $\vec{\omega}$ и $\vec{\beta}$ совпадают по направлению, а при замедленном вращении противоположны по направлению (рис. 2.10).

2.11. Интегрирование уравнений вращательного движения

По аналогии с описанием поступательного движения можно записать кинематические уравнения в *векторной* форме и в *координатной* форме (при вращении, например, вокруг оси Z).

2.11.1. Уравнения в векторной форме

Если известна зависимость вектора углового ускорения (2.38) от времени, то, проинтегрировав ее по времени, мы получим уравнение зависимости вектора угловой скорости движения от времени:

$$\vec{\omega}(t) = \int \vec{\beta}(t)\,dt + C_1. \qquad (2.39)$$

Если известна зависимость вектора угловой скорости (2.36) от времени, то, проинтегрировав ее по времени, мы получим кинематическое уравнение движения в векторной форме:

$$\vec{\varphi}(t) = \int \vec{\omega}(t)\,\mathrm{d}t + C_2. \qquad (2.40)$$

Для того чтобы найти *постоянные интегрирования* C_1 и C_2, необходимо знать *начальные условия* движения.

В равнопеременном вращении – по аналогии с поступательным движением – кинематические уравнения можно записать в *векторной* форме:

$$\left.\begin{aligned} &\vec{\beta} = \text{const},\\ &\vec{\omega}(t) = \vec{\omega}_0 + \vec{\beta}t,\\ &\vec{\varphi}(t) = \vec{\varphi}_0 + \vec{\omega}_0 t + \frac{\vec{\beta}t^2}{2}. \end{aligned}\right\} \qquad (2.41)$$

В равномерном движении при *векторном* описании движения

$$\left.\begin{aligned} &\vec{\beta} = 0,\\ &\vec{\omega}(t) = \vec{\omega}_0 = \text{const},\\ &\vec{\varphi}(t) = \vec{\varphi}_0 + \vec{\omega}_0 t. \end{aligned}\right\} \qquad (2.42)$$

Здесь векторы $\vec{\varphi}_0$ и $\vec{\omega}_0$ есть начальные (в момент времени $t = 0$) значения соответствующих векторов.

Векторы $\Delta\vec{\varphi}$, $\vec{\omega}$ и $\vec{\beta}$, описывающие вращение а.т.т. – *осевые (аксиальные)* векторы. Их направление – условное: оно определяется по правилу правого винта, ввинчивающегося вдоль оси вращения. Их модуль равен значению соответствующей физической величины (в радианах, рад/с, рад/с^2 соответственно).

2.11.2. Уравнения в координатной форме

Если известен вид уравнения зависимости проекции β_z углового ускорения на ось вращения z от времени, то, проинтегрировав его по времени, мы получим уравнение зависимости проекции угловой скорости от времени:

$$\omega_z(t) = \int \beta_z(t)\,\mathrm{d}t + C_1. \tag{2.43}$$

Если известно уравнение зависимости проекций ω_Z угловой скорости на ось вращения z от времени, то, проинтегрировав его по времени, мы получим кинематическое уравнение движения в координатной форме:

$$\varphi_z(t) = \int \omega_z(t)\,\mathrm{d}t + C_2. \tag{2.44}$$

Для того чтобы найти *постоянные интегрирования* C_1, и C_2 необходимо знать *начальные условия* движения.

В равнопеременном движении при *координатном* описании движения:

$$\left.\begin{aligned} &\beta_z = \text{const},\\ &\omega_z(t) = \omega_{0z} + \beta_z t,\\ &\varphi_z(t) = \varphi_{0z} + \omega_{0z}t + \frac{\beta_z t^2}{2}. \end{aligned}\right\} \tag{2.45}$$

В равномерном движении при *координатном* описании движения:

$$\left.\begin{aligned} &\beta_z = 0,\\ &\omega_z(t) = \omega_{0z} = \text{const},\\ &\varphi_z(t) = \varphi_{0z} + \omega_{0z}t. \end{aligned}\right\} \tag{2.46}$$

Здесь величины φ_{0z} и ω_{0z} есть начальные (в момент времени $t = 0$) значения соответствующих проекций.

Поступательное движение м.т. по орбите (*орбитальное движение*) также может быть описано уравнениями, выраженными в угловых характеристиках.

2.12. Взаимосвязь линейных и угловых характеристик движения

При осевом вращении каждая точка а.т.т. движется по орбите, т.е. ее движение является поступательным (рис. 2.11). Следовательно, угловые и линейные характеристики движения связаны друг с другом следующими соотношениями:

$$\vec{v} = \left[\vec{\omega}, \vec{R}\right], \tag{2.47}$$

$$\vec{a}_\tau = \left[\vec{\beta}, \vec{R}\right], \tag{2.48}$$

$$\vec{a}_n = -\frac{v^2}{R}\frac{\vec{R}}{R} = -\omega^2 \vec{R}, \tag{2.49}$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{\beta^2 R^2 + \omega^4 R^2} = R\sqrt{\beta^2 + \omega^4}\,. \tag{2.50}$$

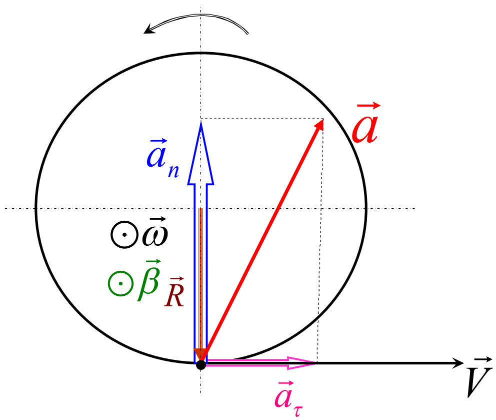


Рис. 2.18. Линейные и угловые характеристики ускоренного осевого вращения а.т.т. (или орбитального движения м.т.)

Контрольные вопросы

1. Как связаны компоненты скорости и ускорения материальной точки с производными ее координат по времени?

2. Может ли криволинейное движение быть равномерным?

3. Чему равно скалярное произведение скорости и ускорения в случае равномерного движения по окружности? Как со временем меняется вектор линейного ускорения?

4. Что характерно для скоростей и ускорений точек тела, движущегося поступательно?

5. Материальная точка равнозамедленно движется по окружности. Как направлены векторы угловой скорости, углового ускорения, тангенциального, нормального и полного ускорений? Как с течением времени меняется угол между линейным ускорением и радиусом-вектором?

6. Может ли движущееся тело иметь векторы $\vec{v}$ и $\vec{a}$, все время направленные в противоположные стороны?

Примеры решения задач

Пример 2.1. По графику зависимости координаты тела от времени (рис. 2.19) постройте графики зависимостей ускорения, скорости и пути, пройденного телом, от времени. Начальная скорость равна нулю.

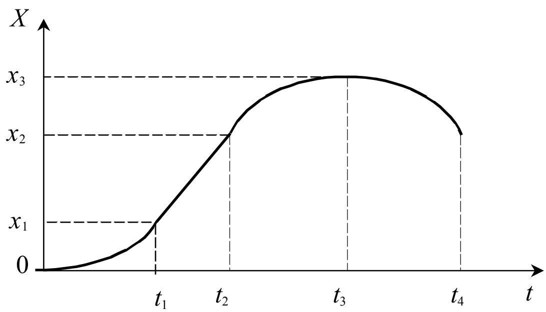


Рис. 2.19

Решение

1. В интервале времени 0...t_1 тело движется равноускоренно в соответствии с уравнением (2.20), но с учетом $v_x = 0$:

$$x(t) = \frac{a_1 t^2}{2}. \quad (2.51)$$

График пути $S(t)$ в этом интервале совпадает с графиком $x(t)$ (рис. 2.19 и 2.20).

Скорость (рис. 2.21) изменяется в соответствии с уравнением (2.25):

$$v_x(t) = a_1 t. \quad (2.52)$$

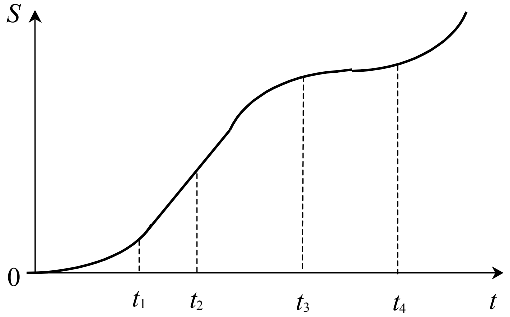


Рис. 2.20

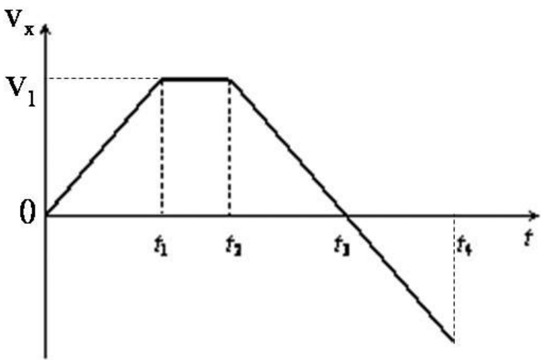


Рис. 2.21

Ускорение a_1 = const (рис. 2.22).

В момент времени t_1 скорость движения тела

$$v_1 = a_1 t_1. \quad (2.53)$$

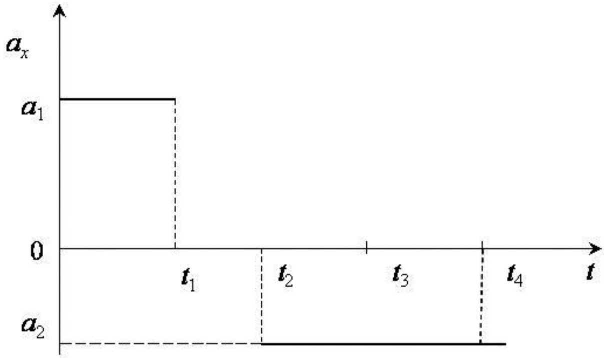


Рис. 2.22

2. В интервале времени $t_1 - t_2$ тело движется равномерно:

$$x(t) = x_1 + v_1 t, \quad (2.54)$$

где $x_1 = \dfrac{a_1 t_1^2}{2}$.

График пути $S(t)$ в этом интервале совпадает с графиком $x(t)$ (см. рис. 2.19 и 2.20).

Скорость $v_1 = \text{const}$ (см. рис. 2.21). Ускорение равно нулю (см. рис. 2.22).

3. В интервале времени $t_2 - t_3$ тело движется равнозамедленно:

$$x(t) = x_2 + v_1 t - \frac{a_2 t^2}{2}, \quad (2.55)$$

где $x_2 = x_1 + v_1(t_2 - t_1)$.

График пути $S(t)$ в этом интервале совпадает с графиком $x(t)$ (см. рис. 2.19 и 2.20).

Скорость (см. рис. 2.21) изменяется в соответствии с уравнением

$$v_x(t) = v_1 - a_2 t. \quad (2.56)$$

Ускорение $a_2 = \text{const}$ (см. рис. 2.22).

4. В момент времени t_3 тело остановилось и начало двигаться равноускоренно в обратном направлении в соответствии с уравнением

$$x(t) = x_3 - \frac{a_2 t^2}{2},(2.57)$$

где $x_3 = x_2 + \mathrm{v}_1 t_3 - \frac{a_2 t_3^2}{2}$.

График пути $S(t)$ в интервале $t_3 - t_4$ не совпадает с графиком $x(t)$ (см. рис. 2.20), поскольку путь может только увеличиваться.

Скорость изменяется (см. рис. 2.21) в соответствии с уравнением

$$\mathrm{v}_x(t) = a_2 t. \quad (2.58)$$

Ускорение a_2 = const (см. рис. 2.22).

Пример 2.2. Трамвай движется прямолинейно (вдоль оси X) от первой остановки (точки М) до следующей остановки (точки К) с ускорением, изменяющимся по закону $a(x) = A - Bx$, где A и B – положительные постоянные, x – координата, отсчитываемая от первой остановки. Найдите расстояние S между этими остановками и максимальную скорость трамвая $\mathrm{v}_x^{\max}$.

Решение

Начало системы координат (x = 0) совместим с точкой М, ось X направим вдоль линии МК. Сначала найдем зависимость скорости от координаты x. За промежуток времени dt приращение скорости

$$\mathrm{dv} = a(x)\mathrm{d}t. \quad (2.59)$$

Приведем это выражение к виду, удобному для интегрирования.

Воспользуемся тем, что

$$\mathrm{d}x = \mathrm{v}_x\, \mathrm{d}t, \quad (2.60)$$

тогда

$$\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{v}_x}. \quad (2.61)$$

Подставим (2.61) в (2.59) и получим

$$d\mathrm{v} = a(x)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{v}_x}.$$

Разделим переменные:

$$a(x)\mathrm{d}x = \mathrm{v}_x \mathrm{d}x.$$

Проинтегрировав это уравнение, получим

$$\frac{\mathrm{v}_x^2}{2} = Ax - \frac{Bx^2}{2} + C, \tag{2.62}$$

где C – константа интегрирования. Для ее определения воспользуемся тем, что на остановках скорость трамвая равна нулю, т.е. при $x = 0$ скорость $\mathrm{v}_x = 0$. Тогда получаем, что $C = 0$.

С учетом этого (2.62) перепишем в виде

$$\frac{\mathrm{v}_x^2}{2} = Ax - \frac{Bx^2}{2}. \tag{2.63}$$

Отсюда

$$\mathrm{v}_x = \sqrt{(2A - Bx)x}. \tag{2.64}$$

Скорость второй раз обращается в нуль на второй остановке в т. K. А это значит, что расстояние S между остановками можно определить так:

$$2A - BS = 0.$$

Отсюда

$$S = \frac{2A}{B}.$$

Максимальную скорость найдем из условия

$$\frac{\mathrm{dv}_x}{\mathrm{d}x} = 0, \tag{2.65}$$

$$\frac{\mathrm{dv}_x}{\mathrm{d}x} = \frac{-Bx + (2A - Bx)}{2\sqrt{(2A - Bx)x}} = \frac{2A - 2Bx}{2\sqrt{(2A - Bx)x}}. \tag{2.66}$$

Из (2.65) и (2.66) получаем, что скорость максимальна, когда

$$\frac{\mathrm{dv}}{\mathrm{d}x} = \frac{2A - 2Bx}{2\sqrt{(2A - Bx)x}} = 0$$

или

$$2A - 2Bx = 0.$$

Отсюда

$$x = \frac{A}{B}.$$

Тогда

$$\text{v}_{max} = \sqrt{\left(2A - B\frac{A}{B}\right)\frac{A}{B}} = \sqrt{\frac{A^2}{B}} = \frac{A}{\sqrt{B}}.$$

Пример 2.3. Радиус-вектор, характеризующий положение частицы относительно неподвижной точки O, изменяется со временем по закону

$$\vec{r}(t) = \vec{A}\sin\omega t + \vec{B}\cos\omega t,$$

где $\vec{A}$ и $\vec{B}$ – постоянные векторы, причем $\vec{A} \perp \vec{B}$;
ω – положительная постоянная.

Найдите максимальное ускорение $|\vec{a}|$ частицы и уравнение ее траектории $y = y(x)$, приняв оси X и Y совпадающими по направлению с векторами $\vec{A}$ и $\vec{B}$, соответственно, и имеющими начало в точке O.

Решение

$$\vec{r}(t) = \vec{A}\sin\omega t + \vec{B}\cos\omega t. \quad (2.74)$$

Поскольку ускорение частицы (2.14) – это вторая производная от радиуса-вектора $\vec{r}(t)$, то

$$\begin{aligned} \vec{a}(t) &= -\vec{A}\omega^2\sin\omega t - \vec{B}\omega^2\cos\omega t = \\ &= -\omega^2\left(\vec{A}\sin\omega t + \vec{B}\cos\omega t\right) = -\omega^2\vec{r}. \end{aligned} \quad (2.75)$$

Определить модуль вектора $\vec{a}$ можно в соответствии с формулой (2.15):

$$|\vec{a}| = a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}. \quad (2.76)$$

Из формулы (2.75) следует, что

$$a_x = \left|\vec{A}\right|\omega^2; \qquad a_y = \left|\vec{B}\right|\omega^2. \qquad (2.77)$$

Подставив (2.77) в (2.76), получим

$$a = \sqrt{\left[\left|\vec{A}\right|\omega^2\right]^2 + \left[\left|\vec{B}\right|\omega^2\right]^2} = \omega^2\sqrt{\left|\vec{A}\right|^2 + \left|\vec{B}\right|^2}.$$

Чтобы получить уравнение траектории $y = y(x)$, из уравнения (2.74) выразим $x(t)$ и $y(t)$.

$$\left.\begin{aligned} x(t) &= \left|\vec{A}\right|\sin\omega t, \\ y(t) &= \left|\vec{B}\right|\cos\omega t. \end{aligned}\right\} \qquad (2.78)$$

Исключив из уравнений (2.78) аргумент ωt, получим уравнение *эллипса*:

$$\frac{x^2}{\left|\vec{A}\right|^2} + \frac{y^2}{\left|\vec{B}\right|^2} = 1,$$

полуоси которого равны $\left|\vec{A}\right|$ и $\left|\vec{B}\right|$ (рис. 2.23).

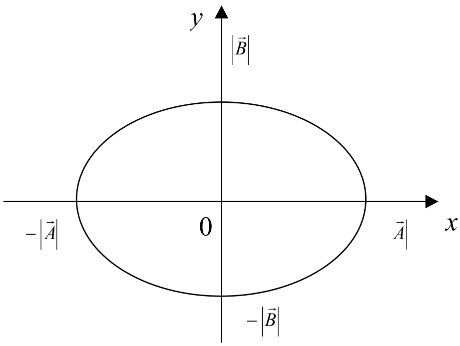


Рис. 2.23

Пример 2.5. Уравнение траектории материальной точки имеет вид:

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} = 1,$$

а зависимость пути от времени задается уравнением $S(t) = 2t^2 + t + 1$ (м). Определите кинематические характеристики поступательного движения и координаты x и y материальной точки через 1 с после начала движения.

Решение

Из уравнения траектории следует: $x^2 + y^2 = 2^2$. Это уравнение окружности радиусом 2 м.

При траекторном описании движения (2.12) скорость будет равна

$$\mathrm{v} = \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = \left(4t + 1\right).. \tag{2.79}$$

Тангенциальное ускорение найдем в соответствии с формулой (2.32) в результате дифференцирования уравнения (2.79):

$$a_\tau = \frac{\mathrm{dv}}{\mathrm{d}t} = 4. \tag{2.80}$$

Нормальное ускорение вычисляется в соответствии с формулой (2.31):

$$a_n = \frac{\mathrm{v}^2}{R}. \tag{2.81}$$

Поскольку $\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n$, то величина полного ускорения может быть найдена из (2.30).

Координаты точки можно представить в виде

$$\left.\begin{aligned} x &= R\cos\varphi, \\ y &= R\sin\varphi, \end{aligned}\right\} \tag{2.82}$$

где φ – угол поворота, определяемый в соответствии с формулой (2.41):

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{\beta t^2}{2}. \tag{2.83}$$

Угловое ускорение может быть найдено в соответствии с формулой (2.48):

$$\beta = \frac{a_\tau}{R} = \frac{4}{2} = 2 \text{ рад/с}^2. \tag{2.84}$$

Прежде чем подставить (2.83) в (2.82), нужно определить φ_0 и ω_0 в момент начала отсчета времени ($t_0 = 0$):

$$\varphi_0 = \frac{S_0}{R},$$

$$\omega_0 = \frac{v_0}{R},$$

$$S_0 = S(0) = 1,$$

следовательно

$$\varphi_0 = \frac{1}{2} = 0{,}5 \text{ рад}, \tag{2.85}$$

$$v_0 = v(0) = 1,$$

а значит

$$\omega_0 = \frac{1}{2} = 0{,}5 \text{ рад/с} . \tag{2.86}$$

Тогда (2.83) с учетом (2.84) – (2.86) будет выглядеть так:

$$\varphi = 0{,}5 + 0{,}5t + t^2 \text{ (рад)}. \tag{2.87}$$

С учетом (2.87) систему (2.83) перепишем в виде

$$\begin{cases} x = R\cos\left(0{,}5 + 0{,}5t + t^2\right), \\ y = R\sin\left(0{,}5 + 0{,}5t + t^2\right). \end{cases} \tag{2.88}$$

Тогда через 1 с после начала отсчета времени по формулам (2.79), (2.81), (2.83) и (2.5.10) вычисляем координаты материальной точки и кинематические характеристики поступательного движения:

$x = 2\cos(0{,}5 + 0{,}5 \cdot 1 + 1^2) = 2\cos 2 = -0{,}832$ м,

$y = 2\sin(0{,}5 + 0{,}5 \cdot 1 + 1^2) = 2\sin 2 = 1{,}82$ м.

$v = 2 \cdot 1 + 1 = 3$ м/с,

$$a_n = \frac{3^2}{2} = 4{,}5 \text{ м/с}^2.$$

По итогам предыдущих расчетов и в соответствии с формулой (2.30) полное ускорение будет равно

$$a = \sqrt{4{,}5^2 + 4^2} = 6{,}02 \text{ м/с}^2.$$

Пример 2.6. Материальная точка начинает двигаться по окружности, радиус которой r = 10 см, с постоянным тангенциальным ускорением a_τ = 0,4 см/с^2= $4\cdot10^{-3}$ м/с^2. Через какой промежуток времени t вектор ускорения $\vec{a}$ образует с вектором скорости $\vec{\mathrm{v}}$ угол $\gamma = 60°$? Какой путь S пройдет за это время движущаяся точка? На какой угол φ повернется радиус-вектор $\vec{r}$, проведенный из центра окружности к движущейся точке? Движение происходит по часовой стрелке (рис. 2.24).

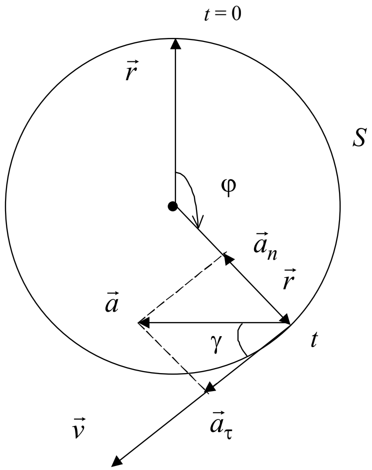


Рис. 2.24

Решение

Материальная точка движется по окружности. Поскольку движение ускоренное, то модуль скорости $|\vec{\mathrm{v}}|$ движущейся точки, а следовательно, и модуль нормального ускорения (2.31) непрерывно возрастают со временем. Касательное ускорение, по условию задачи, постоянно. Следовательно, вектор полного ускорения $\vec{a}$ со временем изменяется как по модулю, так и по направлению.

Угол γ между векторами $\vec{a}$ и $\vec{\mathrm{v}}$ зависит от соотношения между нормальным a_n и касательным a_τ ускорениями:

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{a_n}{a_\tau} = \frac{\mathrm{v}^2}{r a_\tau}. \qquad (2.89)$$

Постоянство касательного ускорения позволяет найти уравнение, описывающее изменение со временем пути S, пройденного точкой, или угла поворота φ радиуса-вектора $\vec{r}$ (см. рис. 2.24).

Следовательно, мгновенная скорость движущейся точки (при условии, что $v_0 = 0$)

$$v = a_\tau t. \tag{2.90}$$

Подставляя это выражение в формулу (2.89), получаем

$$\text{tgr} = \frac{(a_\text{ф} t)^2}{r a_\text{ф}} = \frac{a_\text{ф} t^2}{r}.$$

Тогда время будет равно

$$t = \sqrt{\frac{r\,\text{tg}\,\gamma}{a_\tau}}. \tag{2.91}$$

Путь может быть найден в соответствии с уравнением (2.28):

$$S = \int_0^t v\text{d}t = \int_0^t a_\tau t\text{d}t = \frac{a_\tau t^2}{2}. \tag{2.92}$$

Угол поворота изменяется со временем также по квадратичному закону:

$$\varphi = \frac{S}{r} = \frac{a_\tau t^2}{2r}. \tag{2.93}$$

Подставим численные значения в (2.91) – (2.93) и выполним вычисления:

$$t = \sqrt{\frac{0{,}1 \cdot \text{tg}60°}{0{,}004}} = 6{,}58 \text{ с};$$

$$S = \frac{0{,}004 \cdot 6{,}58^2}{2} = 8{,}66 \text{ см};$$

$$\varphi = \frac{0{,}004 \cdot 6{,}58^2}{2 \cdot 0{,}1} = 0{,}866 \text{ рад}.$$

Глава 3. ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ

При рассмотрении изменений, которые происходят со свободно движущимися телами после того, как они некоторое время взаимодействовали друг с другом, оказывается, что независимо от природы имевшего место взаимодействия удовлетворяются некоторые законы сохранения. Иначе говоря, существуют величины*: импульс, момент импульса* и *энергия*, характеризующие состояния тел, которые отличаются тем, что сумма этих величин по всем взаимодействующим телам не меняется в результате происходившего взаимодействия.

3.1. Свойства пространства – времени и законы сохранения

Законы сохранения выполняются в замкнутых системах взаимодействующих тел.

Система называется *замкнутой*, если на нее не действуют внешние силы.

Система может считаться замкнутой (в условиях данной задачи), если:

– внешние силы есть, но векторная сумма всех внешних сил равна нулю;

– векторная сумма всех внешних сил не равна нулю, но внутренние силы взаимодействия превосходят внешние;

– если внешние силы не меньше внутренних, но время их действия мало по сравнению со временем действия внутренних сил.

Чем же удобна модель *замкнутой* системы? В этих системах все явления (и не только механические) описываются с помощью наиболее простых и общих законов, называемых *законами сохранения*. В любой замкнутой механической системе тел полный импульс $\vec{P}$, полный момент импульса $\vec{L}$ и полная энергия E сохраняются, т.е. остаются неизменными с течением времени при любых процессах, происходящих в системе. *Законы движения замкнутых систем – это законы сохранения импульса, момента импульса и энергии.*

1. Закон сохранения импульса является следствием однородности пространства.

2. Закон сохранения момента импульса является следствием изотропности пространства.

3. Закон сохранения энергии является следствием однородности времени.

3.2. Сохранение импульса

Рассмотрим замкнутую систему тел, т.е. систему, настолько удаленную от всех других тел, что взаимодействием между этими телами и системой можно пренебречь. Вследствие *однородности пространства* можно утверждать, что свойства системы не изменятся при параллельном переносе ее на произвольное расстояние. Следствием этого является сохранение для системы некоторой векторной величины. Именно: существует вектор, характеризующий каждую материальную точку, такой, что сумма всех этих векторов для всех материальных точек, входящих в замкнутую систему, не зависит от времени. Этот вектор называется *вектором импульса*; он находится в определенном соотношении с вектором скорости: импульс связан со скоростью соотношением прямой пропорциональности (3.1). Коэффициент пропорциональности для различных материальных точек различен, он носит название *массы* материальных точек.

3.2.1. Импульс

Импульс – векторная физическая величина, количественно характеризующая запас поступательного движения:

$$\vec{p} = m\vec{\mathrm{v}}\,. \tag{3.1}$$

3.2.2. Масса

Масса – скалярная физическая величина, количественно характеризующая *инертные* и *гравитационные* свойства тела.

Инертная масса характеризует способность тела сопротивляться изменению своего состояния (покоя или движения), например, во *втором законе Ньютона* (рис.3.1)

$$\vec{a} = \frac{\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i}{m}\,. \tag{3.2}$$

Гравитационная масса характеризует способность тела создавать гравитационное поле и взаимодействовать с внешними гравитационными полями, например, в *законе всемирного тяготения* (рис.3.2)

$$\vec{F} = -\gamma \frac{Mm}{r^2}\frac{\vec{r}}{r} = m\vec{g}\,. \tag{3.3}$$

Согласно *принципу эквивалентности* гравитационной и инертной масс - каждая масса является *одновременно* и инертной, и гравитационной (рис.3.3).

3.2.3. Свойства массы

1. Масса тела зависит от плотности вещества ρ и размеров тела (объема тела V):

$$m = \iiint\limits_V \rho \mathrm{d}V \, . \qquad (3.4)$$

2. Масса не тождественна количеству вещества, так как (в отличие от количества вещества) масса зависит от скорости (рис. 3.4):

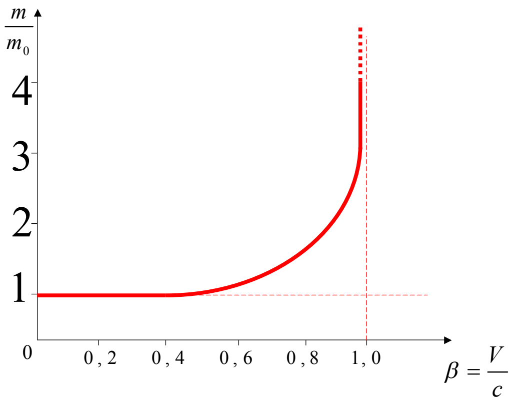


Рис. 3.4. Зависимость массы от скорости

$$m = \gamma m_0, \qquad (3.5)$$

где γ – релятивистский фактор;

m_0 – масса покоя.

3. Понятие массы не тождественно понятиям веса и силы тяжести, так как масса не зависит от полей тяготения и ускорений.

4. Масса необходима и достаточна для описания поступательного движения, но недостаточна для описания вращательного движения.

3.2.4. Свойства импульса

1. Вектор импульса может быть разложен по осям координат:

$$\vec{p} = \vec{p}_x + \vec{p}_y + \vec{p}_z = p_x\vec{i} + p_y\vec{j} + p_z\vec{k}\ . \qquad (3.6)$$

Модуль вектора импульса равен: $|\vec{p}| = \sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}\ .$ (3.7)

2. Импульс зависит от скорости:

$$\vec{p} = m\vec{\mathrm{v}} = \gamma m_0\vec{\mathrm{v}} = \frac{m_0\vec{\mathrm{v}}}{\sqrt{1-\dfrac{\mathrm{v}^2}{c^2}}}\ . \qquad (3.8)$$

3. Полный импульс системы материальных точек:

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^{N}\vec{P}_i = \sum_{i=1}^{N} m_i\vec{\mathrm{v}}_i\ . \qquad (3.9)$$

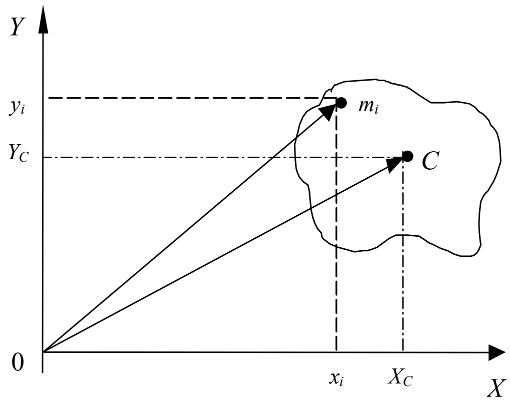


Рис. 3.5. Определение центра инерции системы м.т.

Точка C – *центр масс* (*центр инерции*) твердого тела или системы материальных точек (рис. 3.2). Положение центра масс (инерции) твердого тела определяется по формуле

$$\vec{R}_c = \frac{\sum_{i=1}^{N}(m_i \vec{r}_i)}{\sum_{i=1}^{N} m_i} = X_c \vec{i} + Y_c \vec{j}\,, \tag{3.10}$$

где $X_c = \dfrac{\sum_{i=1}^{N}(m_i x_i)}{\sum_{i=1}^{N} m_i}$;

$$Y_c = \frac{\sum_{i=1}^{N}(m_i y_i)}{\sum_{i=1}^{N} m_i}\,.$$

Модуль радиуса-вектора центра масс:

$$\left|\vec{R}_c\right| = \sqrt{X_c^2 + Y_c^2}\,. \tag{3.11}$$

Тогда полный импульс системы материальных точек или твердого тела равен импульсу материальной точки массой, равной полной массе системы м.т. или твердого тела, которая расположена в центре масс и движется со скоростью центра масс:

$$\begin{aligned}\vec{p}_c &= \sum_{i=1}^{N}\vec{p}_i = \sum_{i=1}^{N}(m_i \vec{\mathrm{v}}_i) = \sum_{i=1}^{N}\left(m_i \frac{\mathrm{d}\vec{r}_i}{\mathrm{d}t}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_{i=1}^{N}(m_i \vec{r}_i) = \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\vec{R}_c \sum_{i=1}^{N} m_i\right) = M\,\frac{\mathrm{d}\vec{R}_c}{\mathrm{d}t} = M\vec{V}_c,\end{aligned} \tag{3.12}$$

где

$$M = \sum_{i=1}^{N} m_i \tag{3.13}$$

– полная масса системы,
а

$$\vec{V}_c = \frac{\mathrm{d}\vec{R}_c}{\mathrm{d}t} \tag{3.14}$$

– скорость центра инерции системы.

3.2.5. Закон сохранения импульса

Для замкнутых систем справедлив *закон сохранения импульса*, который можно сформулировать так: *полный* (суммарный*) импульс замкнутой системы тел сохраняется при любых процессах, происходящих в этой системе.*

Не следует думать, что этот закон требует неизменности импульса каждого тела, входящего в систему. Как раз наоборот – благодаря действию внутренних сил импульсы тел, входящих в систему, все время изменяются. Сохраняется лишь *полный импульс* – векторная сумма импульсов всех составных частей системы:

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i = \text{const}, \tag{3.15}$$

или

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \ldots + \vec{p}_N = \vec{p}\,'_1 + \vec{p}\,'_2 + \ldots + \vec{p}\,'_N,$$

или

$$m_1\vec{\text{v}}_1 + m_2\vec{\text{v}}_2 + \ldots + m_N\vec{\text{v}}_N = m_1\vec{u}_1 + m_2\vec{u}_2 + \ldots + m_N\vec{u}_N, \tag{3.16}$$

где $\vec{\text{v}}_i$ – скорость i-й материальной точки до взаимодействия; $\vec{u}_i$ – ее скорость после взаимодействия ($i = 1, \ldots, N$).

3.2.6. Применения закона сохранения импульса

1. Закон сохранения импульса замкнутой системы можно рассматривать как обобщение *закона инерции – первого закона Ньютона*.

Для свободно движущейся частицы (одной материальной точки, $N = 1$)

$$m\vec{\text{v}} = \text{const} \Rightarrow \vec{\text{v}} = \text{const} \Rightarrow \vec{a} = 0\,. \tag{3.17}$$

2. Рассмотрим замкнутую систему двух ($N = 2$) материальных точек (рис. 3.3):

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \text{const}, \tag{3.18}$$

$$\frac{\text{d}\vec{p}_1}{\text{d}t} + \frac{\text{d}\vec{p}_2}{\text{d}t} = 0\,. \tag{3.19}$$

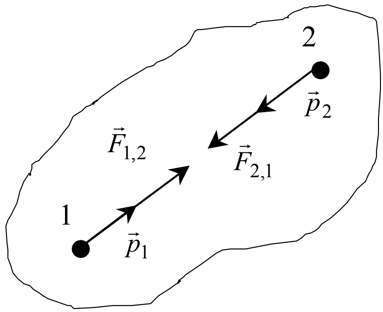


Рис. 3.6. Взаимодействие двух м.т.

Физическая величина, выражающая изменение импульса частицы в единицу времени, будет измерять внешнее воздействие на эту частицу, т.е. *силу,* действующую на данную частицу со стороны другой частицы (других частиц).

Следовательно, векторная сумма сил будет равна нулю:

$$\vec{F}^{1\to 2} + \vec{F}^{2\to 1} = 0\,, \tag{3.20}$$

и это выражает *третий закон Ньютона* – действие равно противодействию.

3. Рассмотрим так называемый *частный закон сохранения импульса* (рис. 3.4) на примере движения м.т. в однородном поле тяготения:

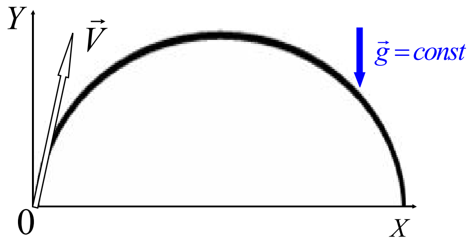


Рис. 3.7. Движение м.т. в однородном поле тяготения

Так как вдоль оси Y действует сила тяжести

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_y = m\vec{g} \neq 0, \tag{3.21}$$

то вдоль оси Y импульс не сохраняется:

$$\vec{p}_y \neq \text{const} \qquad (3.22)$$

и полный импульс системы «м.т. – Земля» не сохраняется:

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i = \vec{p}_x + \vec{p}_y \neq \text{const}, \qquad (3.23)$$

так как система незамкнута.

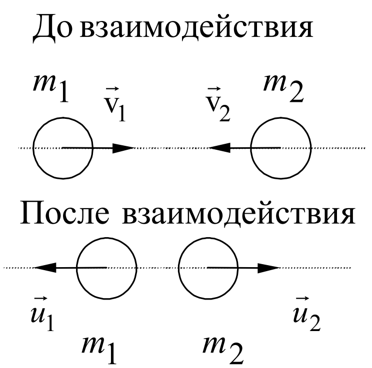
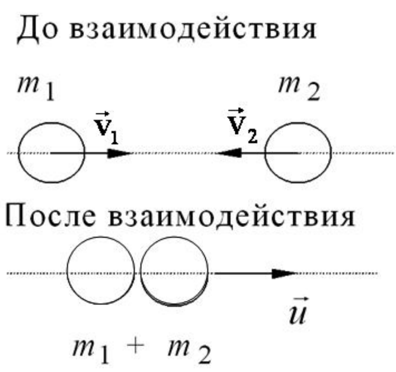
Однако, вдоль оси X силы не действуют $\left(\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_x = 0\right)$, и система может считаться замкнутой. Поэтому

$$\vec{p}_x = \text{const},$$

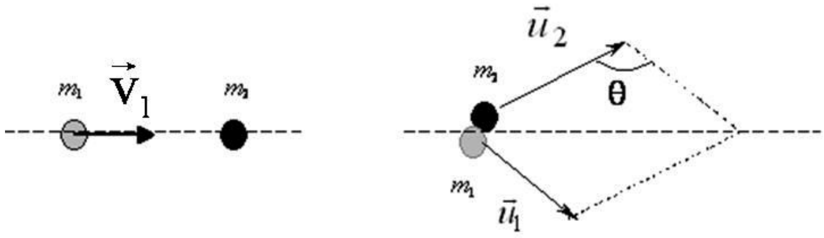
т.е. вдоль оси абсцисс м.т. движется свободно – равномерно и прямолинейно.

4. Центральный удар (табл. 3.1).

Таблица 3.1

Абсолютно упругий удар	Абсолютно неупругий удар
 $m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = m_1\vec{u}_1 + m_2\vec{u}_2$ $\dfrac{m_1 v_1^2}{2} + \dfrac{m_2 v_2^2}{2} = \dfrac{m_1 u_1^2}{2} + \dfrac{m_2 u_2^2}{2}$	 $m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = (m_1 + m_2)\ \vec{u}$ $\dfrac{m_1 v_1^2}{2} + \dfrac{m_2 v_2^2}{2} = \dfrac{(m_1 + m_2)\ u^2}{2} + \Delta U$ (ΔU – изменение внутренней энергии)

5. Абсолютно упругий удар на плоскости (в бильярде) (рис. 3.5).



а *б*

Рис. 3.12. Абсолютно упругий удар:
а – до удара; *б* – после удара

Векторная диаграмма к закону сохранения импульса представлена на рис. 3.6.

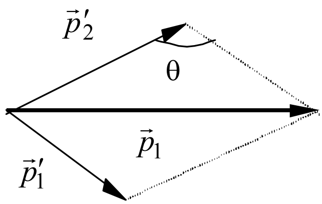


Рис. 3.12. Векторная диаграмма

Закон сохранения импульса:

$$\vec{p}_1 = \vec{p}_1' + \vec{p}_2', ,$$

или (3.24)

$$m_1\vec{v}_1 = m_1\vec{u}_1 + m_2\vec{u}_2,$$

или – по теореме косинусов

$$(m_1 v_1)^2 = (m_1 u_1)^2 + (m_2 u_2)^2 - 2(m_1 u_1)(m_2 u_2)\cos\theta\,. \qquad (3.25)$$

Закон сохранения энергии

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} = \frac{m_1 u_1^2}{2} + \frac{m_2 u_2^2}{2}\,. \qquad (3.26)$$

Если массы шаров одинаковы, то угол θ будет равен 90°.

3.3. Сохранение момента импульса

По отношению к замкнутой системе частиц пространство не только однородно, но и *изотропно*: все направления в нем эквивалентны. Поэтому свойства замкнутой системы не должны меняться при повороте всей системы па произвольный угол вокруг произвольной оси. Это ведет к *сохранению момента импульса* для системы. Рассмотрим теперь *основную динамическую характеристику простого вращательного движения.*

Момент импульса $\vec{L}$ – физическая векторная величина, характеризующая количество и направленность запасенного твердым телом простого вращательного движения (или запас поступательного движения материальной точки в угловых параметрах).

3.3.1. Момент инерции

Момент инерции – физическая величина, количественно характеризующая инертность твердого тела, проявляющуюся во вращательном движении.

Рассмотрим простое вращательное движение а.т.т. вокруг какой-нибудь фиксированной оси. Величина, характеризующая это движение *кинематически*, с точки зрения его быстроты и направленности, – это угловая скорость. Однако, какой *динамической* величиной следует характеризовать «запас» – количество этого движения, которое может быть, например, передано другому телу? Ясно, что этот запас определяется не только угловой скоростью, но и внутренними свойствами этого тела. Если мы обратимся к опытам по передаче простого вращательного движения, то по аналогии с поступательным движением, выясняется, что «запас» простого вращательного движения характеризуется не только угловой скоростью, но некоторой величиной, учитывающей инертные свойства тела. Физическая величина, которая является мерой инертности твердого тела по отношению к простому вращательному движению, называется *моментом инерции тела* относительно той или иной оси.

Момент инерции во вращательном движении играет роль массы при поступательном движении.

Масса необходима, но недостаточна, так как инертность тела во вращательном движении зависит не только от массы, но и от ее распределения относительно оси вращения.

Опыт показывает, что величина момента инерции зависит не только от массы тела, но и от того, каким образом масса распределена относительно оси вращения. Момент инерции не зависит от характера движения тела, но зависит от выбора оси вращения.

Момент инерции материальной точки (рис. 3.7):

$$\mathfrak{I} = mr^2\,, \tag{3.27}$$

где m – масса материальной точки;

r – расстояние от оси вращения.

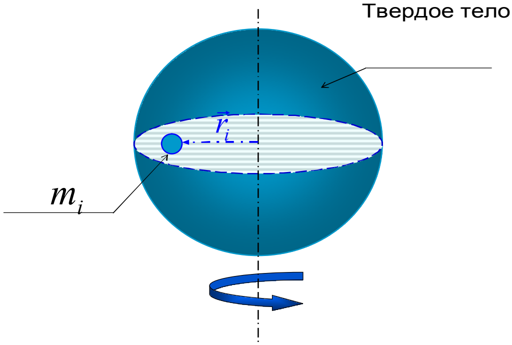


Рис. 3.13. К определению момента инерции м.т.

Основные свойства, характеризующие момент инерции.

1. Из (3.27) видно, что момент инерции не является *векторной* величиной. Необходимо отметить, что момент инерции не будет и *скалярной* величиной, как масса тела, так как является функцией ориентации оси вращения. Сколько осей вращения – столько, вообще говоря, моментов инерции имеет данное тело относительно этих осей. (В ряде случаев для разных осей моменты инерции могут принимать одно и то же значение.)

В физике подобные величины называются *тензорными* величинами.

2. Момент инерции – величина аддитивная. Кстати, это следует непосредственно из (3.27). Сумму произведений массы каждой материальной точки тела на квадрат ее кратчайшего расстояния до оси вращения называют моментом инерции тела относительно этой оси.

Для системы а.т.т. момент инерции относительно оси (например, z) равен сумме моментов инерции всех тел относительно этой оси.

$$\mathfrak{I} = \sum_{i=1}^{N} \left(m_i r_i^2 \right). \tag{3.28}$$

Момент инерции однородного твердого тела с плотностью ρ равен

$$\mathfrak{I} = \int_m r^2\, \mathrm{d}m = \int_V r^2\, \rho \mathrm{d}V. \tag{3.29}$$

Теорема Штейнера: момент инерции $\Im$ тела относительно произвольной оси есть сумма момента инерции $\Im_C$ относительно параллельной оси, проходящей через центр инерции тела, и произведения массы m тела на квадрат расстояния d между осями:

$$\Im = \Im_C + m\,d^2. \tag{3.30}$$

3.3.2. Значения моментов инерции некоторых тел

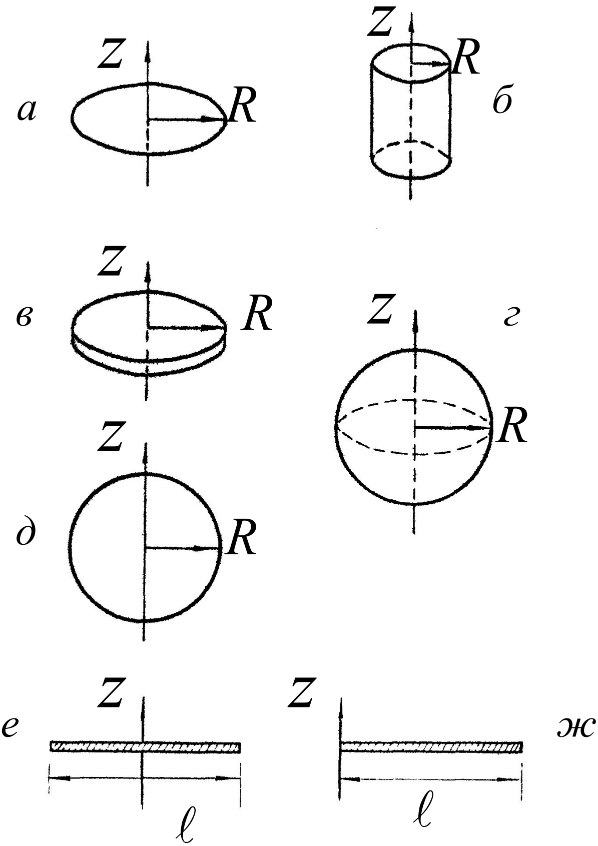


Рис. 3.8. К расчету моментов инерции некоторых тел

1. Момент инерции обруча (рис. 3.8, *а*) радиусом R и массой m относительно оси Z, перпендикулярной плоскости обруча и проходящей через центр инерции обруча, равен

$$\Im_C = mR^2 . \quad (3.31)$$

Если ось Z совпадает с диаметром обруча, то момент инерции будет равен

$$\Im_C = \frac{1}{2} mR^2 . \quad (3.32)$$

2. Момент инерции полого тонкостенного цилиндра (рис. 3.8, *б*) радиусом R и массой m относительно оси Z, совпадающей с продольной осью симметрии цилиндра, равен

$$\Im_C = mR^2 . \quad (3.33)$$

3. Момент инерции сплошного диска (рис. 3.8, *в*) радиусом R и массой m относительно оси, перпендикулярной плоскости обруча и проходящей через центр инерции диска, равен

$$\Im_C = \frac{1}{2} mR^2 . \quad (3.34)$$

Если ось Z совпадает с диаметром диска (рис. 3.8, *д*), то момент инерции будет равен

$$\Im_C = \frac{1}{4} mR^2 . \quad (3.35)$$

4. Момент инерции сплошного шара (рис. 3.8, *г*)радиусом R и массой m относительно оси Z, проходящей через центр инерции шара, равен

$$\Im_C = \frac{2}{5} mR^2 . \quad (3.36)$$

5. Момент инерции тонкого прямого стержня (рис. 3.8, *е*) длиной ℓ и массой m относительно оси Z, проходящей через центр инерции стержня, равен

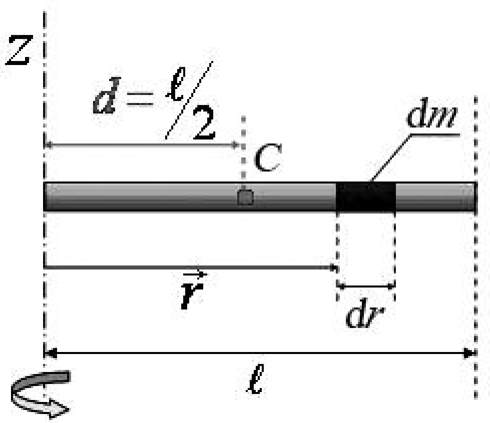
$$\Im_C = \frac{1}{12} m \, \ell^2 . \quad (3.37)$$

Если ось Z проходит через конец стержня (рис. 3.8, *ж*), то момент инерции тонкого прямого стержня длиной ℓ и массой m равен

$$\Im_Z = \frac{m\,\ell^2}{3}. \tag{3.38}$$

Примеры расчетов моментов инерции

1. Момент инерции стержня относительно оси, проходящей через конец стержня (рис.3.1.4).



Линейная плотность массы стержня

$$\lambda = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}r} = \frac{m}{\ell} = \mathrm{const},$$

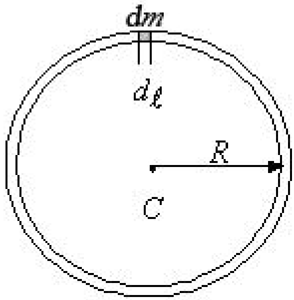
$$\Im = \int r^2 \mathrm{d}m = \lambda \int_0^{\ell} r^2 \mathrm{d}r = \lambda \frac{\ell^3}{3} = \frac{m\ell^2}{3}. \tag{3.39}$$

Чтобы найти момент инерции стержня относительно оси, проходящей через точку C (центр инерции) $\Im_C$, применим теорему Штейнера: $\Im = \Im_C + md^2$. Здесь $d = \frac{\ell}{2}$.

Тогда

$$\Im_C = \Im - md^2 = \frac{m\ell^2}{3} - \frac{m\ell^2}{4} = \frac{1}{12} m\ell^2 .$$

2. Момент инерции обруча относительно оси, проходящей через центр инерции (точку C) обруча перпендикулярно его плоскости (рис.3.15).

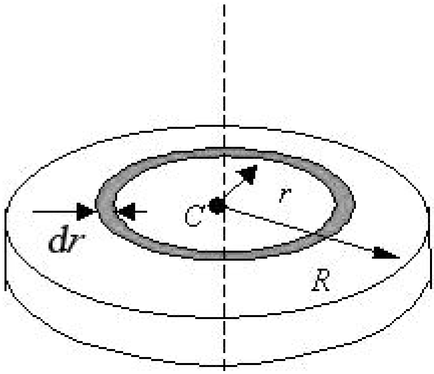


Линейная плотность массы образца

$$\lambda = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}\ell} = \frac{m}{2\pi R} = \mathrm{const} .$$

$$\Im = \int R^2 \mathrm{d}m = R^2 \int_0^{2\pi R} \lambda \mathrm{d}\ell = \lambda R^2 2\pi R = \frac{m}{2\pi R} R^2 2\pi R = mR^2 . \quad (3.40)$$

3. Момент инерции диска относительно оси, проходящей через центр инерции (точку C) перпендикулярно плоскости диска (рис.3.16).



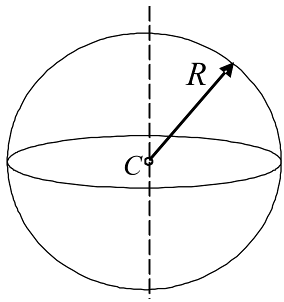
Поверхностная плотность массы диска:

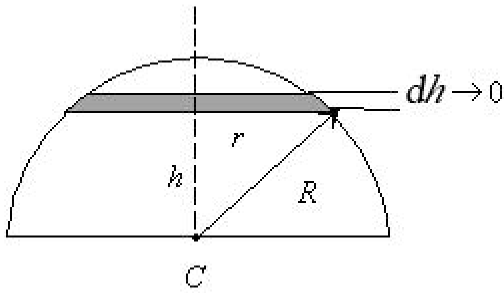
$$\sigma = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}S} = \frac{m}{\pi R^2} = \mathrm{const},$$

$$\mathrm{d}S = 2\pi r \mathrm{d}r,$$

$$\Im_C = \int r^2 \mathrm{d}m = \int r^2 \sigma \mathrm{d}S = \sigma \int_0^R r^2\, 2\pi r \mathrm{d}r = 2\pi\sigma \frac{R^4}{4} = \frac{1}{2} mR^2 \,. \quad (3.41)$$

4. Момент инерции шара относительно оси, проходящей через центр инерции (рис.3.17).





Объемная плотность массы шара

$$\rho = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}V} = \frac{m}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \text{const.}$$

Разрежем половину шара на диски масса каждого – dm, объем – d$V = \pi r^2$dh, толщина – d$h \to 0$ и радиус – r.

$$h = \sqrt{R^2 - r^2}\ ,$$

тогда

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}r} = \frac{-2r}{2\sqrt{R^2 - r^2}} = \frac{-r}{\sqrt{R^2 - r^2}}\ .$$

Моменты инерции таких дисков

$$\mathrm{d}\Im = \frac{1}{2}r^2\mathrm{d}m\ . \qquad (3.42)$$

Момент инерции половины шара получится как результат непрерывного суммирования (интегрирования) этих моментов инерции:

$$\Im_{1/2} = \frac{1}{2}\int r^2 \mathrm{d}m = \frac{1}{2}\int r^2 \rho \mathrm{d}V = \frac{1}{2}\rho\int r^2 \pi r^2 \mathrm{d}h = \frac{\pi}{2}\rho\int r^4 \mathrm{d}h = -\frac{\pi}{2}\rho\int r^4 \frac{r\mathrm{d}r}{\sqrt{R^2 - r^2}}.$$

$$\Im_{1/2} = -\frac{\pi}{2}\rho\int_0^R \frac{r^5 \mathrm{d}r}{\sqrt{R^2 - r^2}}.$$

Момент инерции шара в целом относительно центра инерции – точки C:

$$\Im_C = 2\,\Im_{1/2},$$

$$\Im_C = -\pi \frac{m}{\frac{4}{3}\pi R^3}\int_0^R \frac{r^5 \mathrm{d}r}{\sqrt{R^2 - r^2}} = \frac{2}{5} m R^2. \qquad (3.43)$$

3.3.3. Осевой момент импульса

Вектор осевого момента импульса $\vec{L}_z^{\text{осев}}$ параллелен вектору угловой скорости, направлен по оси вращения и определяется по формуле

$$\vec{L}_z^{\text{осев}} = \Im \vec{\omega}_z, \qquad (3.44)$$

где $\Im$ – момент инерции тела относительно оси Z (рис. 3.18);

$\vec{\omega}_z$ – угловая скорость твердого тела относительно оси Z;

$\vec{L}_z^{\text{осев}}$ – аксиальный вектор.

Основные свойства осевого момента импульса:

1. Момент импульса является аксиальным вектором, направление которого находится по правилу правого винта. Вектор $\vec{L}_z^{\text{осев}}$ можно разложить, в случае необходимости, по координатным осям.

2. Момент импульса системы твердых тел определяется векторной суммой моментов импульса каждого тела.

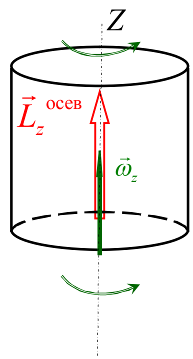


Рис. 3.18. Осевое вращение а.т.т.

3.3.4. Орбитальный момент импульса

Вектор орбитального момента импульса определяется как векторное произведение радиуса-вектора центра инерции тела на его полный импульс:

$$\vec{L}^{\text{орбит}} = \left[\vec{R}_C, \vec{P}\right]. \tag{3.45}$$

где $\vec{L}^{\text{орбит}}$ – аксиальный вектор. Направление $\vec{L}^{\text{орбит}}$ находится по правилу правого винта.

Для м.т. возможно только *поступательное* движение, которое также можно характеризовать орбитальным моментом импульса (рис. 3.19).

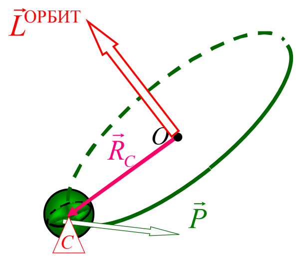


Рис. 3.19. Орбитальный момент импульса м.т.

Для м.т.

$$\vec{L}^{\text{орбит}} = [\vec{r}, \vec{p}], \tag{3.46}$$

где $\vec{p}$ – импульс материальной точки;

$\vec{r}$ – радиус-вектор материальной точки.

В более общем случае движения твердого тела его центр инерции может совершать поступательное движение. Тогда полный импульс твердого тела равен (см. (3.12)):

$$\vec{P} = M\vec{\mathrm{v}}_C.$$

Рассмотрим случай, когда траектория движения центра инерции – окружность. Тогда полный запас вращательного движения твердого тела характеризуется полным моментом импульса твердого тела $\vec{L}$, равным, по определению, векторной сумме собственного (осевого) момента импульса и орбитального момента импульса твердого тела

$$\vec{L} = \vec{L}^{\text{орбит}} + \vec{L}^{\text{осев}}. \tag{3.47}$$

Пример 1. Движение Земли (рис. 3.20).

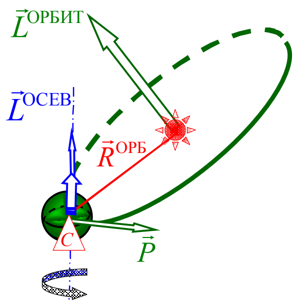


Рис. 3.20. К вычислению полного момента импульса Земли

1. В *орбитальном* движении Земли вокруг Солнца (период равен 1 году) орбитальный момент импульса равен

$$\vec{L}^{\text{орбит}} = \left[\vec{R}^{\text{орбит}}, \vec{P}_З\right] = \left[\vec{R}^{\text{орбит}}, M_З\vec{\mathrm{v}}^{\text{орбит}}\right], \tag{3.48}$$

где $\vec{v}^{\text{орбит}}$ – скорость центра инерции Земли при движении по орбите.

2. В *собственном* вращении Земли относительно оси, проходящей через центр инерции Земли (период равен 1 суткам), осевой момент импульса равен

$$\vec{L}^{\text{осев}} = \Im_З \vec{\omega}_З, \tag{3.49}$$

где $\vec{\omega}_З$ – угловая скорость вращения Земли вокруг своей оси.

3. Полный момент импульса Земли равен

$$\vec{L} = \vec{L}^{\text{орбит}} + \vec{L}^{\text{осев}}. \tag{3.50}$$

Пример 2.Орбитальный момент импульса электрона в атоме водорода.(рис.3.21).

3.3.5. Закон сохранения момента импульса

В замкнутой системе суммарный момент импульса сохраняется:

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{L}_i = \text{const}, \tag{3.51}$$

или

$$\vec{L}_1 + \vec{L}_2 + \ldots + \vec{L}_N = \text{const}. \tag{3.52}$$

Из различия между понятиями «импульс» и «момент импульса» вытекает одно интересное следствие.

Выше было показано, что под действием внутренних сил скорость центра масс системы материальных точек не может измениться. При поступательном движении тела скорость всех его точек совпадает со скоростью центра масс. Следовательно, внутренние силы не в состоянии изменить скорость поступательно движущегося тела.

Совсем иной результат получается при вращении тела вокруг оси. Под действием внутренних сил может измениться расстояние между отдельными частями тела, что приведет к изменению его момента инерции. Но из закона сохранения момента импульса следует, что постоянным является лишь произведение $\vec{L}_z = \Im \vec{\omega}_z$, а не каждый из сомножителей. Если момент инерции под действием внутренних сил уменьшится, то во столько же раз возрастет угловая скорость, произведение же $\left(\Im \vec{\omega}_z\right)$ останется постоянной величиной.

3.3.6. Применения закона сохранения момента импульса

Пример 1. На тело массой *M (Земля)*, движущееся по орбите, действует – *со стороны Солнца* - центральная сила тяготения $\vec{F}$ (система является незамкнутой), но момент этой силы относительно центра (рис. 3.22) равен нулю.

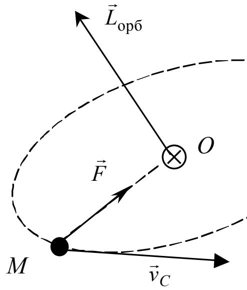


Рис. 3.22. Пример частного закона сохранения момента импульса - центральная сила (***сила тяготения***) действует на Землю со стороны Солнца

Точно так же, как сила (см. (4.1), (4.27), (4.29) и (4.32)) является характеристикой быстроты изменения импульса, характеристикой быстроты изменения момента импульса является *момент силы*. Поэтому в отсутствие момента силы

$$\vec{L}^{\text{орбит}} = \text{const},$$

т.е. сохраняется ориентация орбиты в пространстве.

Для системы, находящейся во внешнем поле, момент импульса в общем случае не сохраняется. Однако сохранение момента все же может иметь место в некоторых специальных случаях. Так, если система находится в центрально-симметричном поле (см. рис.3.22 и 3.23), т.е. в таком поле, в котором потенциальная энергия зависит только от расстояния до некоторой неподвижной точки – центра, то все направления в пространстве, исходящие из центра, эквивалентны, и момент импульса системы относительно этого центра будет сохраняться - так называемый ***частный закон сохранения импульса***.

Рис. 3.23. Пример частного закона сохранения момента импульса - центральная сила (***электростатическая сила***) действует на электрон со стороны ядра атома водорода

Относительно же всякой другой точки пространства момент, естественно, не сохраняется.

Пример 2. Маятник Обербека (рис. 3.24).

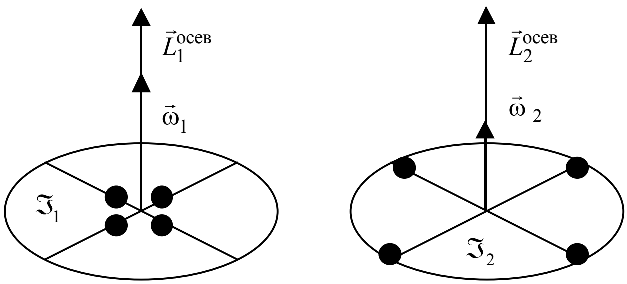


Рис. 3.24. Маятник Обербека

Несмотря на изменение распределения масс относительно оси вращения, момент импульса маятника Обербека сохраняется:

$$\vec{L}_1^{\text{осев}} = \vec{L}_2^{\text{осев}}. \qquad (3.53)$$

Поскольку $\Im_1\vec{\omega}_1 = \Im_2\vec{\omega}_2$, а $\Im_1 < \Im_2$, то $\omega_1 > \omega_2$.

3.4. Сохранение энергии

В отсутствие внешнего поля (или в постоянном внешнем поле) все моменты времени по отношению к данной физической системе эквивалентны. Поэтому ее свойства не могут зависеть от времени явно. Следствием этого обстоятельства является сохранение энергии системы.

Достаточно ли знание импульса и момента импульса – двух динамических векторных величин – для того, чтобы дать полное количественное определение запаса движения той или иной системы? Представим себе систему м.т., движущихся так, что для этой системы

$$\vec{P} = \sum_i \vec{p}_i = 0; \quad \vec{L} = \sum_i \vec{L}_i = 0. \tag{3.54}$$

Но все м.т. движутся. Как охарактеризовать это движение? Необходимо найти подходящую, причем, скалярную меру движения, которая обращалась бы в нуль, если только все $\vec{p}_i$ и $\vec{L}_i$ обращаются в нуль. Такой мерой может служить динамическая величина $\sim p_i^2$ или $\sim L^2{}_i$. Мы приходим к понятию *кинетической* энергии.

В общем случае физическая величина, называемая *энергией*, характеризует как процесс *движения*, так и процесс *взаимодействия*.

3.4.1. Полная энергия. Формула Эйнштейна

Энергия – скалярная физическая величина, являющаяся полной и наиболее общей характеристикой состояния системы.

Состояние системы определяется ее движением и конфигурацией, т.е. взаимным расположением ее частей. Движение системы характеризуется *кинетической энергией K*, а конфигурация – *потенциальной энергией U*.

Полная энергия определяется как сумма

$$E = K + U + E_{\text{внутр}}, \tag{3.55}$$

где K – кинетическая энергия тела, движущегося со скоростью $\vec{v}$ относительно неподвижного наблюдателя;

U – потенциальная энергия взаимодействия тела с внешними телами (полями);

$E_{\text{внутр}}$ – внутренняя энергия тела.

Кинетическая и потенциальная энергии в сумме составляют *механическую энергию.*

Наблюдатель, относительно которого тело движется (рис. 3.25), измеряет

$$E_{\text{мех}} = K + U. \tag{3.56}$$

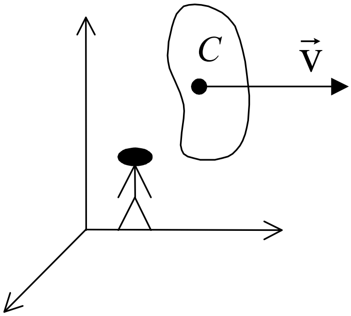


Рис. 3.25. К определению механической энергии

Наблюдатель в системе центра масс (C) измеряет лишь $E_{\text{внутр}}$ (рис. 3.26).

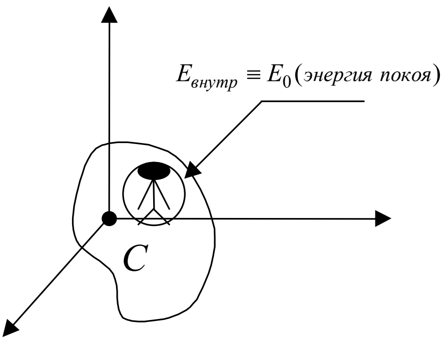


Рис. 3.26. К определению внутренней энергии

Формула Эйнштейна для полной энергии *свободной* частицы:

$$E = \gamma E_0 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} = mc^2. \qquad (3.57)$$

Здесь не рассматривается взаимодействие частицы с внешними силовыми полями – т.е. в понятие *полной энергии* не входит *потенциальная энергия частицы во внешнем силовом поле*.

В системе центра масс $m = m_0$ – *масса покоя*, а

$$E = E_0 = m_0 c^2. \qquad (3.58)$$

– *энергия покоя.*

3.4.2. Внутренняя энергия системы

Поскольку внутренняя энергия определяется в системе отсчета, связанной с самим телом, то внутренняя энергия является одновременно и энергией покоя:

$$E_0 = E_{\text{внутр}} = \sum_{i=1}^{N} E_0(i) + \sum_{i=1}^{N} K_i + \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} U_{ij},\ i \neq j. \tag{3.59}$$

В устойчивой системе:

$$K << |U|, \tag{3.60}$$

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} U_{ij} < 0. \tag{3.61}$$

Поэтому $E_0 < \sum_{i=1}^{N} E_0(i)$ и $M_0 < \sum_{i=1}^{N} m_i$.

При образовании устойчивых систем выделяется энергия

$$\Delta E = \Delta mc^2, \tag{3.62}$$

называемая энергией связи.

Здесь $Дm = \left(\sum_{i-1}^{N} m_i - M_0 \right)$ – *дефект массы.* (3.63)

З а м е ч а н и е. В свою очередь внутренняя энергия i-й молекулы выражается формулой

$$E_0(i) = \sum_{m} E_0(m) + \sum_{m} K_m + \sum_{m}\sum_{k\neq m} (U_{mk}). \tag{3.64}$$

Здесь $\sum_{m} E_0(m)$ – энергия покоя атомов, из которых состоит i-я молекула вещества.

3.4.3. Кинетическая энергия

Кинетическая энергия – это скалярная физическая величина, количественно характеризующая запас движения (табл. 3.2), которое может превращаться в другой вид движения, а энергия, соответственно, – в другую, например – в потенциальную энергию. Это отличает кинетическую энергию от импульса, который характеризует только запас движения.

Кинетическая энергия – величина арифметическая, неотрицательная.

Релятивистская кинетическая энергия определяется по формуле

$$K = E - E_0 = mc^2 - m_0c^2 = E_0(\gamma - 1) = E_0\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right). \qquad (3.65)$$

При малых скоростях $\beta << 1$

$$\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \approx 1 + \frac{1}{2}\beta^2 .$$

$$K = E_0 \frac{1}{2}\beta^2 = m_0c^2 \frac{1}{2}\frac{\mathrm{v}^2}{c^2} = \frac{m_0\mathrm{v}^2}{2} . \qquad (3.66)$$

Таблица 3.2

Материальная точка	$K = \dfrac{m\mathrm{v}^2}{2}, (m \equiv m_0)$
Система материальных точек или абсолютно твердое тело (в поступательном движении)	$K = \dfrac{1}{2}M\mathrm{v}_c^2 = \dfrac{1}{2}\dfrac{P_c^2}{M} = \dfrac{1}{2}\left(\vec{P}_c, \vec{\mathrm{v}}_c\right)$, где $M = \sum\limits_{i=1}^{N} m_i$
Абсолютно твердое тело (во вращательном или в орбитальном движениях)	$K = \dfrac{1}{2}\Im\omega^2 = \dfrac{1}{2}\dfrac{L^2}{\Im} = \dfrac{1}{2}\left(\vec{L}, \vec{\omega}\right)$

3.4.4. Потенциальная энергия

Потенциальная энергия – скалярная физическая величина, характеризующая взаимодействие тел с другими телами или с полями. Потенциальная энергия характеризует скрытый запас энергии, который определяется конфигурацией системы, т.е. взаимным расположением частей системы. Рассмотрим описание взаимодействий с помощью понятия потенциальной энергии:

Упругое взаимодействие (рис. 3.27):

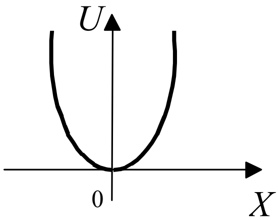


Рис. 3.27.Потенциальная кривая упругого взаимодействия

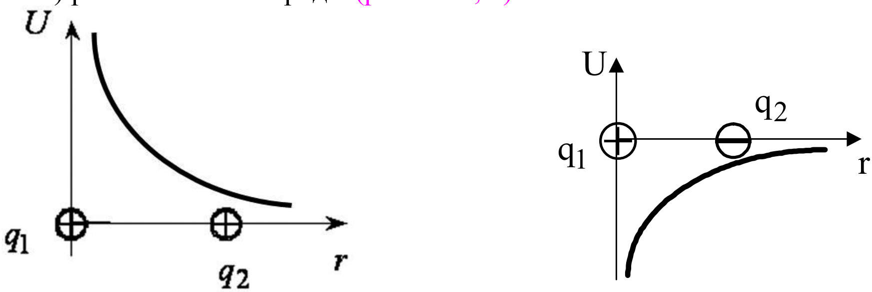
$$U = \frac{kx^2}{2}. \qquad (3.67)$$

Электростатическое (кулоновское) взаимодействие точечных зарядов:

а) одноименные заряды (рис. 3.28, *а*)

$$U = k\frac{|q_1||q_2|}{r}.$$

б) разноименные заряды (рис. 3.28, *б*)



а *б*

Рис. 3.28. Потенциальная кривая кулоновского взаимодействия:
а – одноименных зарядов; *б* – разноименных зарядов

$$U = -k\frac{|q_1||q_2|}{r}. \qquad (3.68)$$

Гравитационное взаимодействие:

а) точечных масс (рис. 3.29):

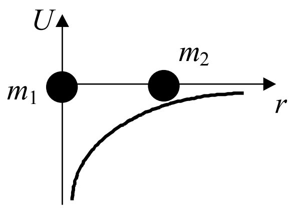


Рис. 3.29. Потенциальная кривая гравитационного взаимодействия точечных масс

$$U = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r}; \tag{3.69}$$

б) в однородном гравитационном поле ($\vec{g}$ = const) (рис. 3.30).

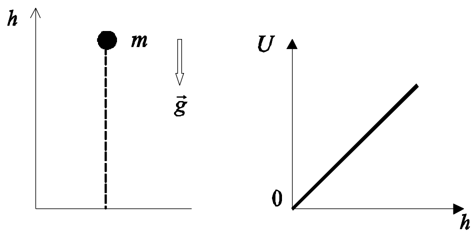


Рис. 3.30. Потенциальная кривая взаимодействия точечной массы с однородным гравитационным полем

$$U = mgh. \tag{3.70}$$

3.4.5. Закон сохранения энергии

Рассмотрим энергию тела в системе отсчета, связанной с его центром масс:

$$E_0 = \sum_i E_0^{(i)} + E_{\text{мех}}. \tag{3.71}$$

1. Взаимодействие тел без диссипации (рассеяния) энергии.

Полная механическая энергия замкнутой и изолированной от любых внешних воздействий системы тел, в которой действуют лишь консервативные силы, есть величина постоянная:

$$\left(\sum_i E_0^{(i)}\right)' = \left(\sum_i E_0^{(i)}\right)'' \quad \text{и} \quad E'_{\text{мех}} = E''_{\text{мех}} \tag{3.72}$$

(например, в абсолютно упругом ударе).

2. Взаимодействие тел при наличии диссипации энергии.

Если в замкнутой системе тел, кроме консервативных, действуют также неконсервативные силы, например – силы трения, то полная механическая энергия системы не сохраняется. В этом случае выполняется более общий закон сохранения – *в замкнутой и изолированной системе остается постоянной сумма всех видов энергии (включая и немеханические):*

$$\left(\sum_i E_0^{(i)}\right)' + E'_{\text{мех}} = \left(\sum_i E_0^{(i)}\right)'' + E''_{\text{мех}} \tag{3.73}$$

(например, в абсолютно неупругом ударе).

При неупругих взаимодействиях внутренняя энергия изменяется на величину

$$Q = \left(\sum_i E_0^{(i)}\right)'' - \left(\sum_i E_0^{(i)}\right)'. \tag{3.74}$$

3.5. Законы сохранения как принципы запрета

Законы сохранения проявляются как принципы запрета: *любое явление, при котором не выполняется хотя бы один из законов сохранения, запрещено, и в природе такие явления никогда не наблюдаются. Всякое явление, при котором не нарушается ни один закон сохранения, в принципе может происходить.* Заметим, что незапрещенные явления на практике всегда и происходят, хотя и с разной вероятностью: некоторые из этих явлений происходят очень часто, другие – редко, но все же их можно наблюдать.

Может показаться, что законы сохранения оставляют слишком большой произвол, слишком много вариантов, и потому неясно, почему в эксперименте реализуется чаще всего один-единственный процесс. На самом же деле оказывается, что совместное действие нескольких законов сохранения часто почти однозначно определяет возможный ход процесса.

Рассмотрим следующий пример. Может ли покоящееся тело за счет своей внутренней энергии начать двигаться? Этот процесс не противоречит закону сохранения энергии. Нужно лишь, чтобы возникшая кинетическая энергия точно равнялась убыли внутренней энергии.

На самом же деле этот процесс никогда не происходит, ибо он противоречит закону сохранения импульса. Раз тело покоилось, то его импульс был равен нулю. А если оно станет двигаться, то его импульс сам собой увеличится, что невозможно. Поэтому внутренняя энергия тела не может превратиться в кинетическую, если тело не распадется на части.

Если же допустить возможность распада этого тела на части, то запрет, налагаемый законом сохранения импульса, снимается. При этом возникшие осколки могут двигаться так, чтобы их центр масс остался в покое, – а только этого и требует закон сохранения импульса.

Итак, для того чтобы внутренняя энергия покоящегося тела могла превратиться в кинетическую, это тело должно быть способно распадаться на части. Если же есть еще один какой-либо закон, запрещающий распад этого тела на осколки, то его внутренняя энергия (и масса покоя) будут постоянными величинами.

Между законами сохранения и законами типа основного уравнения динамики (см. ниже) имеется принципиальная разница. Законы динамики дают нам представление о детальном ходе процесса. Так, если задана сила, действующая на материальную точку, и начальные условия, то можно найти закон движения, траекторию, величину и направление скорости в любой момент времени и т.п. (см. гл. 4). Законы же сохранения не дают нам прямых указаний на то, как должен идти тот или иной процесс. Они говорят лишь о том, какие процессы запрещены и потому в природе не происходят.

Контрольные вопросы

1. Чему равен импульс материальных точек в системе центра инерции?

2. Шары А и Б абсолютно упругие. Шар Б – неподвижен. При каком условии после соударения с шаром А шар Б придет в движение, а шар А ос-

тановится; шар А и шар Б будут двигаться в противоположных направлениях?

3. Могут ли момент импульса и угловая скорость вращающегося тела быть неколлинеарными?

4. В каком случае кинетическая энергия вращающегося тела определяется формулой $\frac{\mathfrak{J}щ^2}{2}$?

5. Может ли обладать моментом импульса материальная точка, движущаяся по прямолинейной траектории?

6. На сортировочной станции с горки скатываются (без трения) два вагон: один груженый, другой – порожний. Сравните пути, проходимые вагонами по прямолинейному участку после скатывания.

7. Два сплошных цилиндра, сделанные из разных материалов, имеют одинаковые массы и радиусы оснований. Сравните их моменты инерции относительно осей симметрии.

8. Два сплошных диска, сделанные из разных материалов, имеют одинаковые массу и толщину. Сравните их моменты инерции относительно осей симметрии.

9. Два цилиндра, сделанные из разных материалов, имеют одинаковые массы и размеры. Как, пользуясь наклонной плоскостью, определить, какой из цилиндров сплошной, а какой – полый?

Примеры решения задач

Пример 3.1. Два шара движутся навстречу друг другу вдоль прямой, проходящей через их центры (рис. 3.8). Масса и скорость первого шара соответственно равны m_1 = 4 кг и v_1 = 8 м/с, второго шара m_2 = 6 кг и v_2 = 2 м/с. С какой скоростью u будут двигаться шары после абсолютно неупругого соударения? Какая часть кинетической энергии η шаров перейдет во внутреннюю энергию?

Решение

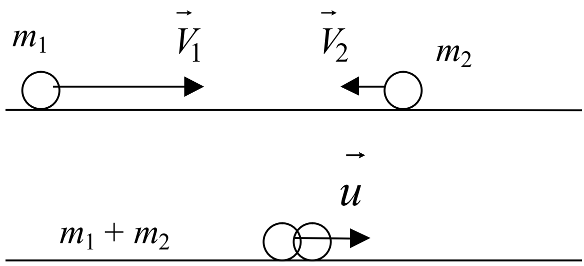


Рис. 3.8

По условию удар является *центральным*, так как центры инерции шаров лежат на линии удара, и *прямым*, так как векторы скорости $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ центров инерции шаров в начале удара направлены параллельно линии удара.

В результате абсолютно неупругого удара шары деформируются и слипаются, т.е. движутся как единое целое со скоростью $\vec{u}$.

Поскольку система может считаться замкнутой $\left(\sum\limits_{i=1}^{N} \vec{F}_i = 0\right)$, можно записать уравнение закона сохранения импульса (см. табл. 3.1):

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = \left(m_1 + m_2\right)\vec{u},$$

или в проекции на ось OX:

$$m_1 v_1 - m_2 v_2 = (m_1 + m_2)u. \qquad (3.75)$$

Закон сохранения энергии для абсолютно неупругого удара имеет вид (см. табл. 3.1):

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{(m_1 + m_2)u^2}{2} + Q. \qquad (3.76)$$

Особенностью абсолютно неупругого удара является сохранение полной энергии, а не механической (кинетической), так как часть начальной механической энергии Q затрачивается на деформацию шаров, т.е. переходит во внутреннюю энергию шаров.

Из уравнения (3.75) найдем скорость шаров после удара:

$$u = \frac{m_1 v_1 - m_2 v_2}{(m_1 + m_2)}. \qquad (3.77)$$

Из уравнения (3.76) найдем, какая часть кинетической энергии шаров переходит во внутреннюю энергию:

$$\eta = \frac{Q}{\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2}} = \frac{\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} - \frac{(m_1 + m_2)u^2}{2}}{\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2}} =$$

$$= 1 - \frac{(m_1 + m_2)u^2}{m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2}. \qquad (3.78)$$

Подставим численные значения в (3.77) и (3.78) и получим

$$u = \frac{4 \cdot 8 - 6 \cdot 2}{(4 + 6)} = 2 \text{ м/с.}$$

$$\eta = 1 - \frac{(4 + 6) \cdot 2^2}{4 \cdot 8^2 + 6 \cdot 2^2} = 0{,}857.$$

Пример 3.2. Стержень длиной ℓ и массой M может вращаться вокруг неподвижной оси, проходящей через верхний конец стержня (**рис. 3.31**). В середину стержня попадает пуля массой m, летящая в горизонтальном направлении со скоростью v , и застревает в стержне. На какой угол φ отклонится стержень после удара?

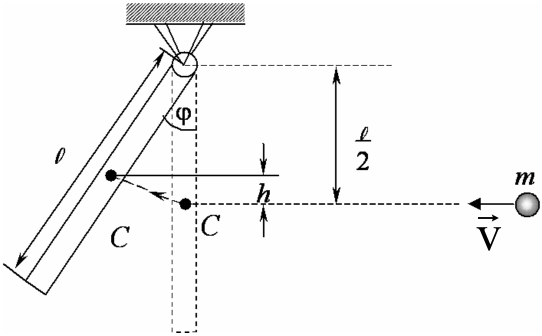


Рис. 3.31

Решение

Удар пули следует рассматривать как неупругий: после удара и пуля, и соответствующая точка стержня будут двигаться с одинаковыми скоростями. Рассмотрим подробнее явления, происходящие при ударе. Сначала пуля, ударившись о стержень, за ничтожно малый промежуток времени приводит его в движение с угловой скоростью ω и сообщает ему кинетическую энергию (см. табл. 3.2)

$$K = \frac{\Im\omega^2}{2}, \tag{3.79}$$

где $\Im$ – момент инерции стержня относительно оси вращения.

Затем стержень поворачивается на искомый угол φ и останавливается, причем центр масс его поднимается на высоту

$$h = \frac{\ell}{2}(1 - \cos\varphi).$$

В отклоненном положении стержень будет обладать потенциальной энергией

$$U = Mg\frac{\ell}{2}(1 - \cos\varphi). \tag{3.80}$$

В соответствии с законом сохранения энергии приравниваем правые части формул (3.91) и (3.92), и получаем

$$Mg\frac{\ell}{2}\left(1-\cos\varphi\right)=\frac{\Im\omega^2}{2}.$$

Отсюда

$$\cos\varphi=1-\frac{\Im\omega^2}{Mg\ell}.$$

Подставив в эту формулу выражение для момента инерции стержня относительно оси вращения (3.38):

$$\Im=\frac{1}{3}M\ell^2, \tag{3.81}$$

получим

$$\cos\varphi=1-\frac{\ell\omega^2}{3g}. \tag{3.82}$$

Чтобы из формулы (3.81) найти φ, необходимо предварительно определить значение ω. В момент удара на пулю и на стержень действуют силы тяжести, линии действия которых проходят через ось вращения и направлены вертикально вниз. Моменты этих сил относительно оси вращения равны нулю. Поэтому при ударе пули о стержень будет справедлив закон сохранения момента импульса.

В начальный момент удара угловая скорость стержня $\omega_0 = 0$, поэтому его момент импульса $\vec{L}_{01}=\Im\vec{\omega}_0=0$. Начальный орбитальный момент импульса пули (3.41):

$$\vec{L}_{02}=\left[\vec{r},m\vec{\mathrm{v}}_0\right], \tag{3.83}$$

где $r=\frac{\ell}{2}$ – расстояние точки попадания пули от оси вращения.

При попадании в стержень пуля сообщает ему угловое ускорение и участвует во вращении стержня вокруг оси.

В конечный момент удара стержень имел угловую скорость $\vec{\omega}$, а пуля – линейную скорость $\vec{\mathrm{v}}$, равную линейной скорости точек стержня, находящихся на расстоянии r от оси вращения. Так как

$\vec{\mathrm{v}} = [\vec{\omega}, \vec{r}]$ (2.41), то конечные моменты импульсов пули $\vec{L}_2$ и стержня $\vec{L}_1$ соответственно равны

$$\left.\begin{aligned} \vec{L}_1 &= \Im\,\vec{\omega} \\ \vec{L}_2 &= [\vec{r}, m\vec{\mathrm{v}}] \ = mr^2\vec{\omega} \end{aligned}\right\} \tag{3.84}$$

Применив закон сохранения момента импульса, можем написать

$$\vec{L}_{01} + \vec{L}_{02} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2 \tag{3.85}$$

или

$$\left[\vec{r}, m\vec{\mathrm{v}}_0\right] \ = \ \Im\vec{\omega} + mr^2\vec{\omega}\,. \tag{3.86}$$

В проекции на ось вращения

$$rm\mathrm{v}_0 \ = \ \Im\omega + mr^2\omega \tag{3.87}$$

и с учетом (3.93)

$$\omega = \frac{m\mathrm{v}_0\dfrac{\ell}{2}}{\dfrac{1}{3}M\ell^2 + m\left(\dfrac{\ell}{2}\right)^2} = \frac{6m\mathrm{v}_0}{(4M+3m)\ell}\,. \tag{3.88}$$

Подставим это выражение в (3.82). Получим

$$\varphi = \arccos\left[1 - \frac{\ell}{3g}\left(\frac{6m\mathrm{v}_0}{(4M+3m)\ell}\right)^2\right].$$

Пример 3.3. На краю горизонтальной платформы, имеющей форму диска радиусом R, стоит человек массой m. Масса платформы равна M. Платформа может вращаться вокруг вертикальной оси, проходящей через ее центр. Пренебрегая трением, найдите, с какой угловой скоростью будет вращаться платформа, если человек будет идти вдоль ее края со скоростью u' относительно платформы (**рис. 3.32**).

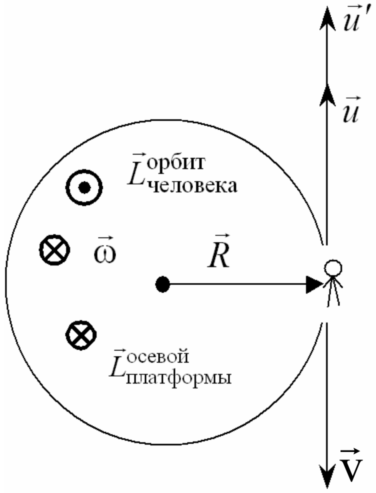


Рис. 3.32

Решение

Угловую скорость вращения платформы найдем из закона сохранения момента импульса:

$$0 = \vec{L}^{\text{орбит}}_{\text{человека}} + \vec{L}^{\text{осев}}_{\text{платформы}}, \tag{3.89}$$

где (в соответствии с формулой (3.41))

$$\vec{L}^{\text{орбит}}_{\text{человека}} = \left[\vec{R}, m\vec{u}\right]$$

и (в соответствии с формулой (3.39))

$$\vec{L}^{\text{осевой}}_{\text{платформы}} = \Im\vec{\omega}.$$

Так как моменты импульсов человека и платформы противоположно направлены, то

$$Rmu - \Im\omega = 0. \tag{3.90}$$

Платформа имеет форму диска, следовательно – с учетом (3.34) –

$$\Im = \frac{1}{2}MR^2. \tag{3.91}$$

Скорость человека относительно Земли $\vec{u}$ найдем из закона сложения скоростей (1.2):

$$\vec{u} = \vec{u}' + \vec{\text{v}},$$

где $\vec{u}'$ – скорость человека относительно платформы,

$\vec{\text{v}}$ – скорость краевых точек платформы относительно Земли, которая может быть найдена из формулы (2.41).

Векторы $\vec{u}'$ и $\vec{\text{v}}$ противоположно направлены, следовательно

$$u = u' - \text{v} = u' - \omega R. \qquad (3.92)$$

Подставим (3.91) и (3.92) в (3.90). Получим

$$m\left(u' - \omega R\right)R = \left(\frac{1}{2}MR^2\right)\omega,$$

$$2mu'R = (M + 2m)R^2\omega.$$

Отсюда

$$\omega = \frac{2mu'}{\left(M + 2m\right)R}. \qquad (3.93)$$

Подставим в (3.93) численные значения и выполним вычисления:

$$\omega = \frac{2 \cdot 80 \cdot 2}{\left(240 + 2 \cdot 80\right) \cdot 2} = 0{,}4 \text{ рад/с}.$$

Глава 4. СИЛЫ В ПРИРОДЕ

4.1. Понятие силы

Сила – векторная физическая величина, характеризующая быстроту изменения – как по величине, так и по направлению – импульса тела в результате взаимодействия данного тела с другими телами или полями:

$$\vec{F} = \frac{\mathrm{d}\vec{P}}{\mathrm{d}t}. \tag{4.1}$$

Это определение применимо и к потенциальным, и к непотенциальным силам (см. ниже).

В каждый данный момент времени действующая на тело сила как вектор характеризуется ее модулем (величиной), направлением в пространстве и точкой приложения. Прямая, вдоль которой направлена сила, называется *линией действия* силы. Если тело можно рассматривать как абсолютно твердое (например, во вращательном движении), то силу можно считать приложенной в любой точке на ее линии действия. Если тело можно рассматривать как материальную точку (например, в поступательном движении), то силу можно считать приложенной в центре инерции (центре масс) данного тела.

4.2. Классификация сил

4.2.1. Фундаментальные силы

Все *реальные силы* в природе сводятся к *четырем фундаментальным силам*, которые, в свою очередь, характеризуют *четыре фундаментальных взаимодействия* (G^2 – интенсивность взаимодействия; R – радиус взаимодействия.):

1. *Гравитационное взаимодействие* ($G_g^2 \sim 10^{-39}$, $R \sim \infty$).

В гравитационном взаимодействии участвуют все элементарные частицы и поэтому оно – самое универсальное. Носителями взаимодействия являются: в *волновом* представлении – гравитационные волны, в *корпускулярном* представлении – гравитоны (существование тех и других предполагается).

2. *Слабое взаимодействие* ($G_w^2 \sim 10^{-14}$, $R \sim 10^{-18}$ м).

В слабом взаимодействии участвуют все элементарные частицы. Носителями взаимодействия являются $W^{\pm}$ и Z^0 бозоны (в *корпускулярном* представлении). Слабое взаимодействие проявляется при распадах ядер.

3. *Электромагнитное взаимодействие* ($G_e^2 \sim 10^{-2}$, $R \sim \infty$).

В электромагнитном взаимодействии участвуют все заряженные частицы. Носителями взаимодействия являются: в *волновом* представлении – электромагнитные волны, в *корпускулярном* – фотоны.

4. *Сильное, или ядерное, взаимодействие* ($G_s^2 \sim 1$, $R \sim 10^{-15}$ м).

В сильном, или ядерном, взаимодействии участвуют все частицы, кроме лептонов. Носителями взаимодействия являются π-мезоны, а в представлении *кваркового* строения адронов – глюоны.

Слабое и электромагнитное взаимодействия образуют *электрослабое* взаимодействие при энергиях $E > 300$ ГэВ.

Слабое, электромагнитное и сильное взаимодействия образуют *«Великое объединение»* при энергиях $E > 10^{14}$ ГэВ.

Все четыре взаимодействия вместе образуют *«Суперобъединение»* при энергиях $E > 10^{19}$ ГэВ. Его носителями являются гипотетические частицы: гравитино, гравифотоны, гравитоны.

4.2.2. Силы консервативные и неконсерватитвные

Силы делятся на:

1. *Консервативные* (потенциальные): их работа по замкнутой траектории равна нулю, т.е. их работа не сопровождается рассеиванием энергии;

2. *Неконсервативные*, которые, в свою очередь, делятся на:

а) *диссипативные*, действие которых сопровождается рассеиванием энергии, например сила трения;

б) *гироскопические* (зависят от величины и направления вектора скорости, например магнитная сила Лоренца).

4.3. Потенциальные (консервативные) силы

Потенциальные силы определяются *конфигурацией* системы, т.е. взаимным расположением ее частей.

В свою очередь, как уже было сказано выше, конфигурация системы характеризуется скалярной величиной – потенциальной энергией U, а изменение конфигурации – градиентом потенциальной энергии. *Градиентом скалярной величины* U называют вектор, направленный в сторону быстрейшего увеличения этого же скаляра:

$$\mathrm{grad}U = \frac{\partial U}{\partial r}\vec{e}_r = \frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k}, \qquad (4.2)$$

где $\vec{e}_r$ – радиальный орт;

$\vec{i}, \vec{j}$ и $\vec{k}$ – орты, направленные по осям координат.

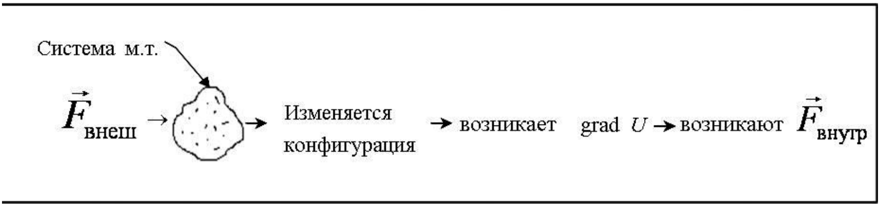


Рис. 4.1.Взаимосвязь внутренних сил и градиента потенциальной энергии

Появляется возможность и необходимость *количественно* связать градиент потенциальной энергии grad$U$ и внутренние потенциальные силы $\vec{F}_{\text{внутр}}$ (рис. 4.1).

$$-\mathrm{grad}U = -\nabla U = -\frac{\partial U}{\partial r}\vec{e}_r = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k}\right) = \vec{F}_{\text{внутр}}, \quad (4.3)$$

здесь grad$U$ – причина, $\vec{F}_{\text{внутр}}$ – следствие.

4.4. Примеры расчетов внутренних сил

4.4.1. Упругое взаимодействие (закон Гука) (рис. 4.2)

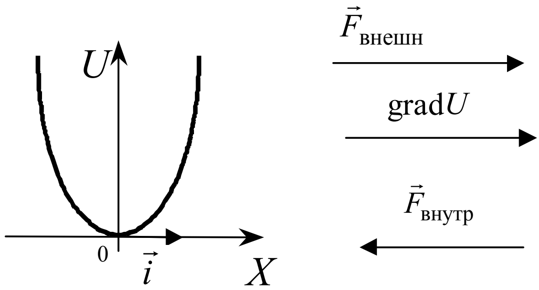


Рис. 4.2. Возникновение упругой силы

$$\vec{F}_{\text{внутр}} = -\frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{kx^2}{2}\right)\vec{i} = -kx\vec{i}. \qquad (4.4)$$

4.4.2. Электростатическое взаимодействие (закон Кулона)

Взаимодействие разноименных точечных зарядов (рис.4.3):

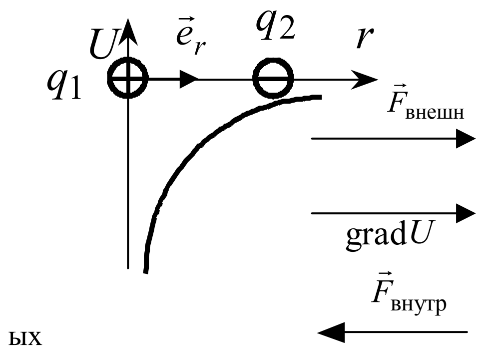


Рис. 4.3. Возникновение электростатической (кулоновской) силы притяжения

$$\vec{F}_{\text{внутр}} = -\frac{\partial U}{\partial r}\vec{e}_r = -k\frac{\partial}{\partial r}\left(-\frac{|q_1||q_2|}{r}\right)\vec{e}_r = -k\frac{|q_1||q_2|}{r^2}\vec{e}_r. \tag{4.5}$$

Взаимодействие одноименных точечных зарядов (рис. 4.4):

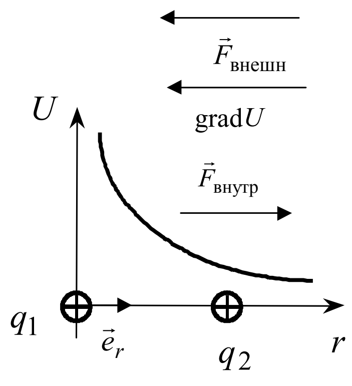


Рис. 4.4. Возникновение кулоновской силы отталкивания

$$\vec{F}_{\text{внутр}} = -\frac{\partial U}{\partial r}\vec{e}_r = -k\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{|q_1||q_2|}{r}\right)\vec{e}_r = k\frac{|q_1||q_2|}{r^2}\vec{e}_r. \tag{4.6}$$

4.4.3. Гравитационное взаимодействие

В центральном поле точечных масс *(закон всемирного тяготения)* (рис. 4.5)

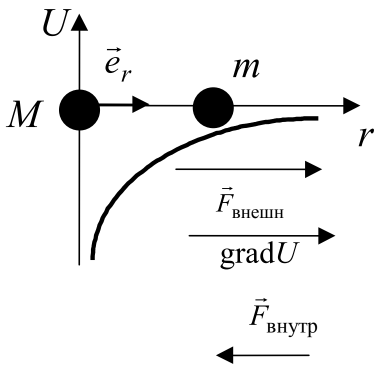


Рис. 4.5. Возникновение центральной гравитационной силы

$$\vec{F}_{\text{внутр}} = -\frac{\partial U}{\partial r}\vec{e}_r = -\frac{\partial}{\partial r}\left(-\gamma\frac{mM}{r}\right)\vec{e}_r = -\gamma\frac{mM}{r^2}\vec{e}_r\,. \tag{4.7}$$

В однородном поле (рис. 4.6)

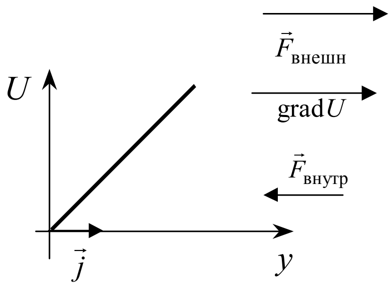


Рис. 4.6. Возникновение гравитационной силы
в однородном поле тяготения

$$\vec{F}_{\text{внутр}} = -\frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} = -\frac{\partial}{\partial y}(mgy)\,\vec{j} = -mg\vec{j}\,. \tag{4.8}$$

4.5. Момент силы

Понятие силы необходимо и достаточно для описания поступательного движения.

Для описания вращательного движения понятие силы необходимо, но недостаточно.

Чтобы сила стала достаточной характеристикой, необходимо указать ее «плечо», т.е. радиус-вектор, проведенный из точки O на оси вращения в точку приложения силы (рис. 4.7). Таким образом возникает *момент силы*. Момент силы $\vec{M}$ является причиной возникновения и изменения вращательного движения.

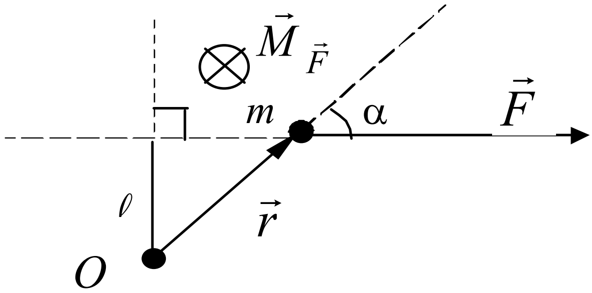


Рис. 4.7. Момент силы

Момент силы $\vec{F}$ относительно точки O равен:

$$\vec{M}_{\vec{F}}(O) = \left[\vec{r}, \vec{F}\right], \tag{4.9}$$

$$\left|\vec{M}_{\vec{F}}\right| = rF\sin\alpha = F\ell, \tag{4.10}$$

где ℓ – плечо силы.

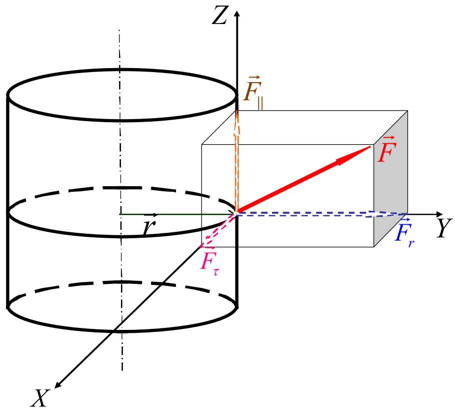


Рис. 4.8. Пример разложения силы $\vec{F}$

Если разложить силу $\vec{F}$ по осям координат так, как показано на рис. 4.8:

$$\vec{F} = \vec{F}_X + \vec{F}_Y + \vec{F}_Z = \vec{F}_\tau + \vec{F}_r + \vec{F}_\parallel, \tag{4.11}$$

то обнаружится, что:

по оси X действует $\vec{F}_\tau$ – касательная (тангенциальная) составляющая силы,

по оси Y действует $\vec{F}_r$ – радиальная составляющая силы, по оси Z действует $\vec{F}_\parallel$ – продольная составляющая силы.

$$\vec{M}_{\vec{F}} = \left[\vec{r}, \vec{F}\right] = \left[\vec{r}, \vec{F}_\tau\right] + \left[\vec{r}, \vec{F}_r\right] + \left[\vec{r}, \vec{F}_\parallel\right]. \tag{4.12}$$

Продольная составляющая силы параллельна оси вращения и вектор $\left[\vec{r}, \vec{F}_\parallel\right]$ направлен перпендикулярно к оси Z, т.е. проекция этого вектора на ось Z равна 0. Радиальная составляющая $\vec{F}_r \parallel \vec{r}$, поэтому вектор $\left[\vec{r}, \vec{F}_r\right] = 0,$ т.е. эта составляющая момента не создает. Следовательно, момент относительно оси Z создается только касательной составляющей силы:

$$\left(\vec{M}_{\vec{F}}\right)_Z = \left[\vec{r}, \vec{F}_\tau\right]. \tag{4.13}$$

Как будет показано в 4.8, *момент силы* является количественной характеристикой быстроты изменения *момента импульса* – точно так же, как *сила* является количественной характеристикой быстроты изменения *импульса*.

4.6. Работа

Работа – скалярная физическая величина, характеризующая изменение энергии:

$$A = \int_1^2 \mathrm{d}E = \Delta E. \tag{4.14}$$

Работа силы $\vec{F}$ на пути $\mathrm{d}\vec{S}$ равна (в *линейных* характеристиках)

$$A = \int_1^2 \left(\mathrm{d}\vec{p}, \vec{\mathrm{v}}\right) = \int_1^2 \left(\vec{F}, \mathrm{d}\vec{S}\right). \tag{4.15}$$

Работа при повороте, характеризуемом вектором углового перемещения $\mathrm{d}\vec{\varphi}$, равна (в *угловых* характеристиках)

$$A = \int_1^2 \left(\mathrm{d}\vec{L}, \vec{\omega}\right) = \int_1^2 \left(\vec{M}, \mathrm{d}\vec{\varphi}\right). \tag{4.16}$$

В замкнутой системе в условиях действия закона сохранения механической энергии

$$E' = E'', \tag{4.17}$$

т.е. сумма потенциальной и кинетической энергий сохраняется:

$$U' + K' = U'' + K'',$$

следовательно, увеличение потенциальной энергии сопровождается уменьшением кинетической энергии, и наоборот.

Тогда работа будет равна

$$A = -\Delta U = \Delta K. \tag{4.18}$$

Принято считать, что работа *внутренних* сил, сопровождающаяся *уменьшением* потенциальной энергии, – величина положительная, а работа *внешних* сил, сопровождающаяся *увеличением* потенциальной энергии, – величина отрицательная.

Работа потенциальных сил $\vec{F}$ по замкнутому пути равна нулю:

$$A = \oint \delta A = \oint \left(\vec{F}, \mathrm{d}\vec{S}\right) = 0.$$

Пример. Работа силы тяжести в однородном гравитационном поле, или работа внутренних сил (рис. 4.9)

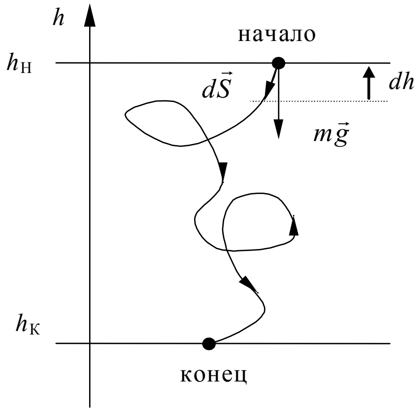


Рис. 4.9. Работа силы тяжести в однородном гравитационном поле

Работа внутренней силы:

$$A_{внутр} = \int_{Н}^{К} \left(\vec{F}, \mathrm{d}\vec{S}\right) = \int_{Н}^{К} \left(m\vec{g}, \mathrm{d}\vec{S}\right) = \int_{Н}^{К} mg \ \mathrm{d}S_{mg} \ , \tag{4.19}$$

где $\mathrm{d}S_{mg}$ – проекция вектора элементарного перемещения на направление силы тяжести $m\vec{g}$;

$$\mathrm{d}S_{mg} = -\ \mathrm{d}h.$$

$$A_{внутр} = -\int_{Н}^{К} mg \ \mathrm{d}h = mg(h_Н - h_К) = U_Н - U_К > 0. \tag{4.20}$$

$$A_{внутр} = -\ \Delta U. \tag{4.21}$$

Работа внутренней силы совершается за счет уменьшения потенциальной энергии системы.

4.7. Мощность сил

Мощность (N) характеризует быстроту совершения работы или быстроту изменения энергии:

$$N = \frac{\delta A}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}. \tag{4.22}$$

В стационарных силовых полях, где $\vec{F} \neq \vec{F}(t)$:

в поступательном движении $N=\frac{\delta A}{\mathrm{d}t}=\frac{\left(\vec{F},\mathrm{d}\vec{S}\right)}{\mathrm{d}t}=\left(\vec{F},\vec{\mathrm{v}}\right)$; (4.23)

во вращательном движении $N=\frac{\delta A}{\mathrm{d}t}=\frac{\left(\vec{M},\mathrm{d}\vec{\varphi}\right)}{\mathrm{d}t}=\left(\vec{M},\vec{\omega}\right)$. (4.24)

4.8. Законы динамики

4.8.1.Основной закон динамики материальной точки (или абсолютно твердого тела в поступательном движении)

4.8.1.1. Уравнения Ньютона.

Из равенств (4.1) и (4.3) следует, что

$$\frac{\mathrm{d}\vec{P}}{\mathrm{d}t}=-\,\mathrm{grad}U. \tag{4.25}$$

Эти соотношения представляют собой *уравнения движения системы материальных точек* в самом общем случае. Уравнения механики в форме (4.25) носят название *уравнений Ньютона*.

4.8.1.2. Основной закон динамики м.т.

Второй закон Ньютона (в линейных характеристиках):

$$\vec{a}=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i\,, \tag{4.26}$$

или

$$\frac{\mathrm{d}\vec{P}}{\mathrm{d}t}=\sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i\,. \tag{4.27}$$

В этих уравнениях справа записаны причины, приводящие к изменению импульса и появлению линейного ускорения.

В случае $\sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i=0$ м.т. сохраняет состояние покоя или равномерного прямолинейного движения (*первый закон Ньютона*). В первом законе Ньютона содержится идея существования *инерциальных систем отсчета*.

На рис. 4.10 и 4.11 приведены примеры движения материальной точки в гравитационном поле Земли.[1]

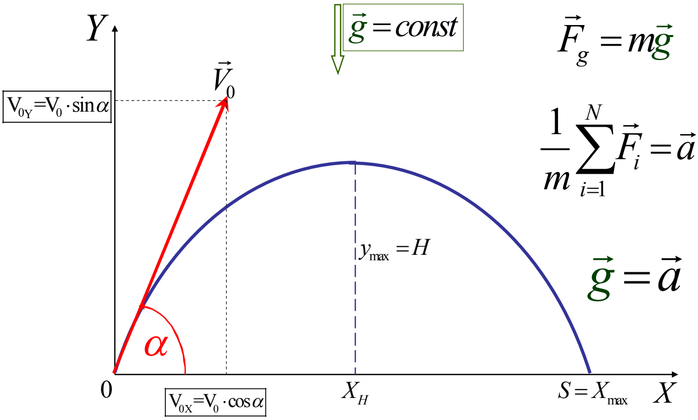


Рис. 4.10. Движение материальной точки в *однородном* гравитационном поле Земли

[1] Подробное решение соответствующих задач, см. в части 3 учебного пособия «Силовые поля».

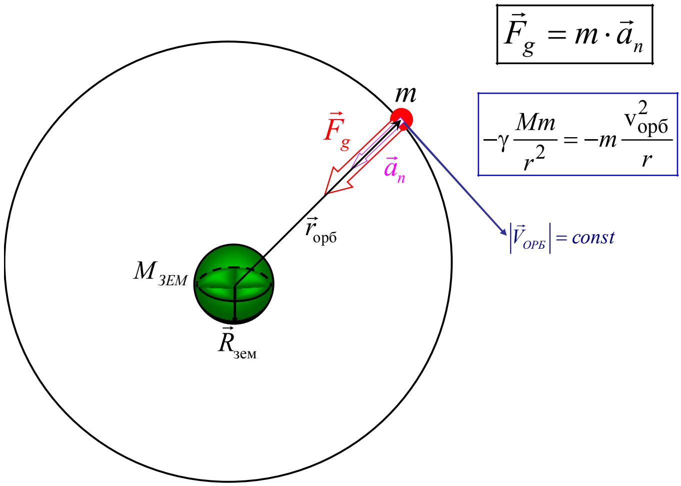


Рис. 4.11. Движение материальной точки в *центрально-симметричном* гравитационном поле Земли

4.8.1.3. Основной закон динамики а.т.т.

В орбитальном (поступательном) движении (в угловых характеристиках):

$$\vec{\beta} = \frac{1}{\mathfrak{I}} \sum_{i=1}^{N} \vec{M}_i \,, \tag{4.28}$$

или

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}^{\text{орбит}}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\left[\vec{R}\vec{p}\right]}{\mathrm{d}t} = \sum_{i=1}^{N} \vec{M}_i \,. \tag{4.29}$$

В этих уравнениях справа записаны причины, приводящие к изменению *орбитального* момента импульса и появлению углового ускорения.

Если вектор силы лежит в плоскости орбиты (рис. 4.12, 4.13), то плоскость орбиты не меняется, изменяется лишь характер движения.

4.8.2. Основной закон динамики движения а.т.т. в простом (осевом) вращении

Уравнения, выражающие этот закон, аналогичны уравнениям для орбитального движения м.т.:

$$\vec{\beta} = \frac{1}{\Im}\sum_{i=1}^{N}\vec{M}_i \tag{4.31}$$

или

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}^{\text{осев}}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\left(\Im\vec{\omega}\right)}{\mathrm{d}t} = \sum_{i=1}^{N}\vec{M}_i\,, \tag{4.32}$$

но под действием суммы моментов изменяется во времени *осевой* момент импульса.

Рассмотрим пример ускоренного вращения а.т.т. (рис. 4.12).

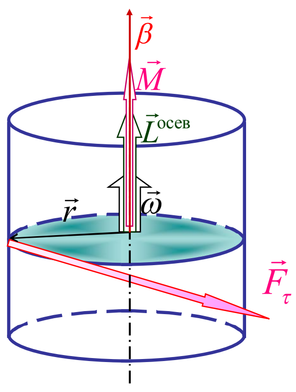


Рис. 4.12. Ускоренное вращение а.т.т.

Под действием момента силы изменяется осевой момент импульса и возникает угловое ускорение:

$$\vec{M} = \left[\vec{r}, \vec{F}_{\tau}\right] = \frac{\mathrm{d}\vec{L}^{\text{осев}}}{\mathrm{d}t} = \Im\vec{\beta}. \tag{4.33}$$

Рис. 4.13. Замедленное вращение а.т.т.

4.9. Релятивистский закон динамики материальной точки

Запишем уравнение основного закона динамики м.т., принимая во внимание зависимость массы от скорости:

$$\vec{F} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(m\vec{\mathrm{v}}\right) = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\vec{\mathrm{v}} + \frac{\mathrm{d}\vec{\mathrm{v}}}{\mathrm{d}t}m = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\vec{\mathrm{v}} + \vec{a}m. \tag{4.34}$$

Если учесть формулу Эйнштейна для полной релятивистской энергии (3.57), то

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{c^2}\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{c^2}\left(\vec{F}, \vec{\mathrm{v}}\right), \tag{4.35}$$

где $\left(\vec{F}, \vec{\mathrm{v}}\right) = \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = N$ – мощность силы (4.23).

Тогда уравнение релятивистского закона динамики материальной точки можно записать так:

$$m\vec{a} = \vec{F} - \frac{1}{c^2}\left(\vec{F}, \vec{\mathrm{v}}\right)\vec{\mathrm{v}}. \tag{4.36}$$

В общем случае ускорение $\vec{a}$ не параллельно силе $\vec{F}$, действующей на м.т. (рис. 4.14).

Ускорение направлено вдоль силы в двух частных случаях.

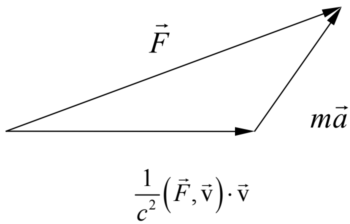


Рис. 4.14. Векторная диаграмма релятивистского закона динамики м.т.

4.9.1. Поперечная сила

Пусть на тело действует поперечная сила $\vec{F}_{\perp} \perp \vec{\mathrm{v}}$ (рис. 4.15), тогда $\left(\vec{F}_{\perp},\vec{\mathrm{v}}\right)=0$.

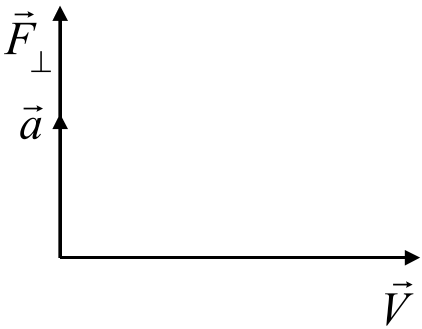


Рис. 4.15. Действие поперечной силы

Поэтому

$$m\vec{a}=\vec{F}_{\perp}, \tag{4.37}$$

где

$$m=\gamma m_0,$$

$$\gamma=\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \beta=\frac{\mathrm{v}}{c}.$$

Тогда

$$\vec{a} = \frac{1}{\gamma} \frac{\vec{F}_{\perp}}{m_0}, \qquad (4.38)$$

т.е. ускорение *параллельно* поперечной силе.

4.9.2. Продольная сила

Пусть на тело действует продольная сила $\vec{F}_{\parallel} \parallel \vec{\mathrm{v}}$ (рис. 4.16), тогда

$$\left(\vec{F}_{\parallel}, \vec{\mathrm{v}}\right) \vec{\mathrm{v}} = \vec{F}_{\parallel} \mathrm{v}^2. \qquad (4.39)$$

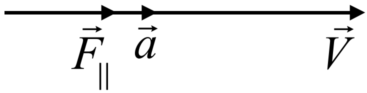


Рис. 4.16. Действие продольной силы

Поэтому
$$m\vec{a} = \vec{F}_{\parallel} - \frac{\mathrm{v}^2}{c^2} \vec{F}_{\parallel} = \frac{\vec{F}_{\parallel}}{\gamma^2} \qquad (4.40)$$

и тогда
$$\vec{a} = \frac{1}{\gamma^3} \frac{\vec{F}_{\parallel}}{m_0}, \qquad (4.41)$$

т.е. ускорение *параллельно* продольной силе.

4.10. Основной закон динамики в неинерциальных системах отсчета

4.10.1. Возникновение силы инерции

Рассмотрим движение м.т. в СО $\boxed{\text{К}}$ и $\boxed{\text{К}'}$ (рис. 4.17). Пусть $\boxed{\text{К}}$ – ИСО. СО $\boxed{\text{К}'}$, движущаяся относительно ИСО $\boxed{\text{К}}$ с переменной скоростью $\vec{\mathrm{v}} = \vec{\mathrm{v}}(t)$, – *неинерциальная система отсчета* (НИСО).

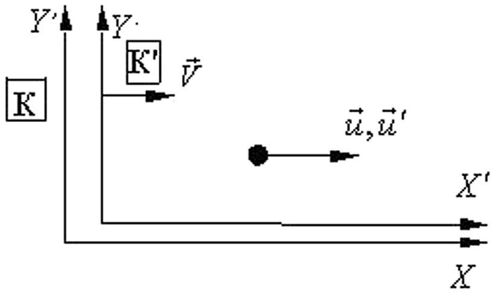


Рис. 4.17. Движение НИСО $\boxed{К'}$ относительно ИСО $\boxed{К}$

В соответствии с законом сложения скоростей Галилея (1.3):

$$\vec{u}' = \vec{u} - \vec{v},$$

где $\vec{u}$ и $\vec{u}'$ – скорости м.т. в СО $\boxed{К}$ и $\boxed{К'}$ соответственно.

Пусть в общем случае $\vec{u} = \vec{u}(t)$.

Тогда

$$\vec{u}'(t) = \vec{u}(t) - \vec{v}(t). \tag{4.42}$$

Продифференцируем это уравнение по времени и получим

$$\vec{a}' = \vec{a} - \vec{w}, \tag{4.43}$$

где $\vec{w}$ – ускорение НИСО $\boxed{К'}$ относительно ИСО $\boxed{К}$.

(В ИСО $\boxed{К}$ тело может двигаться и без ускорения, т.е. может быть, что $\vec{a} = 0$.)

Пусть

$$\vec{a} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i. \tag{4.44}$$

Тогда

$$\vec{a}' = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i - \vec{w}, \tag{4.45}$$

или

$$m\vec{a}' = \sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i - m\vec{w}. \tag{4.46}$$

Предположим, что второй закон Ньютона справедлив и в неинерциальных системах отсчета:

$$m\vec{a}' = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i{}' \;, \tag{4.47}$$

где

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i' = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i + \vec{f}_{\text{инерции}} \;, \tag{4.48}$$

а сила инерции

$$\vec{f}_{\text{инерции}} = -m\vec{w} \,. \tag{4.49}$$

Основной закон динамики в НИСО:

$$m\vec{a}' = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i + \vec{f}_{\text{инерции}} \,, \tag{4.50}$$

где $\vec{f}_{\text{инерции}}$ – зависит от массы (как и гравитационная сила).

В инерциальной системе отсчета ускорение – это следствие действия сил.

Сила инерции, которая появляется в НИСО, является следствием ускоренного движения этой системы отсчета.

4.10.2. Сила инерции в поступательно движущихся системах отсчета

1. Нет движения (рис. 4.18).

$$\vec{\mathrm{v}} = 0 \,,$$

$$\vec{w} = 0 \,,$$

$$\vec{T} + m\vec{g} = m\vec{a} = 0 \,. \tag{4.51}$$

Поэтому $$\vec{a}' = 0 \;\; (\sum \vec{F}' = 0) \,. \tag{4.52}$$

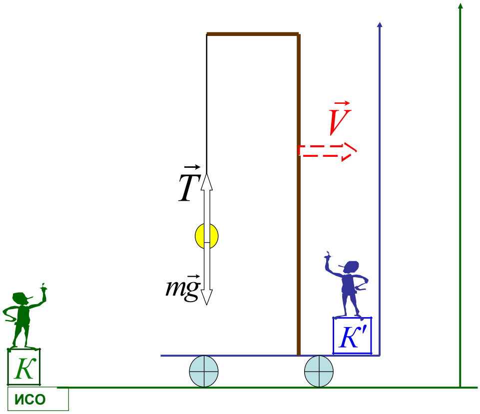


Рис. 4.18. Силы, действующие на тело
с точки зрения наблюдателей $\boxed{К}$ и $\boxed{К'}$

2. Тележка движется ускоренно относительно наблюдателя, который находится в инерциальной системе отсчета $\boxed{К}$ (рис. 4.19).

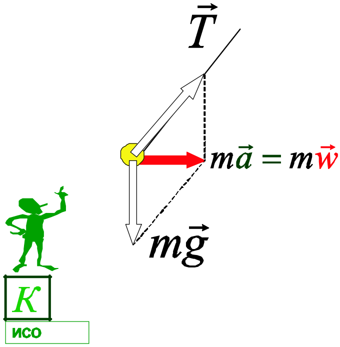


Рис. 4.20. Силы, действующие на тело с точки зрения наблюдателя $\boxed{К}$

$$\vec{v}(t) \neq 0 \text{ и } \vec{w} \neq 0,$$

$$\vec{T} + m\vec{g} = m\vec{a}, \tag{4.53}$$

$$\vec{a} = \vec{w}. \tag{4.54}$$

3. Наблюдатель находится в движущейся системе отсчета $\boxed{\text{К'}}$ – на тележке (рис. 4.21).

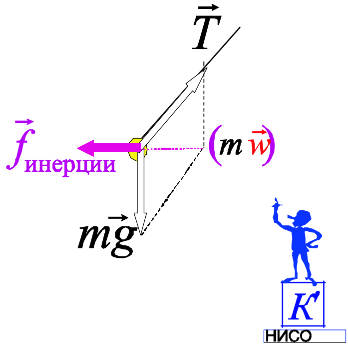


Рис. 4.21. Силы, действующие на тело с точки зрения наблюдателя $\boxed{\text{К'}}$

$$\vec{a}' = 0, \text{ так как } \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i' = 0,$$

$$\vec{T} + m\vec{g} + \underbrace{\left(-m\vec{w}\right)}_{f_{\text{инерции}}} = 0, \tag{4.55}$$

$$\vec{T} + m\vec{g} + \vec{f}_{\text{инерции}} = 0. \tag{4.56}$$

В НИСО $\boxed{K'}$ появляется *сила инерции*.

4.10.3. Сила инерции во вращающихся системах отсчета

1. Вращения нет (рис. 4.22).

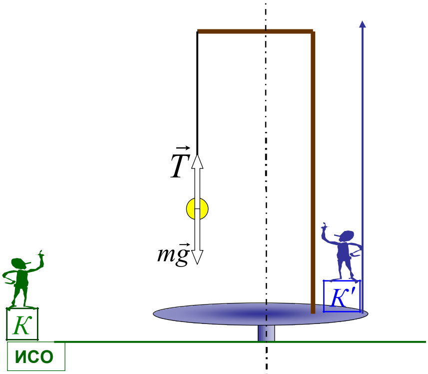


Рис. 4.22. Силы, действующие на тело, с точки зрения наблюдателей $\boxed{\text{К}}$ и $\boxed{\text{К}'}$

$$\vec{T} + m\vec{g} = 0. \tag{4.57}$$

2. Наблюдатель находится в инерциальной системе отсчета $\boxed{\text{К}}$, платформа равномерно вращается (рис. 4.23).

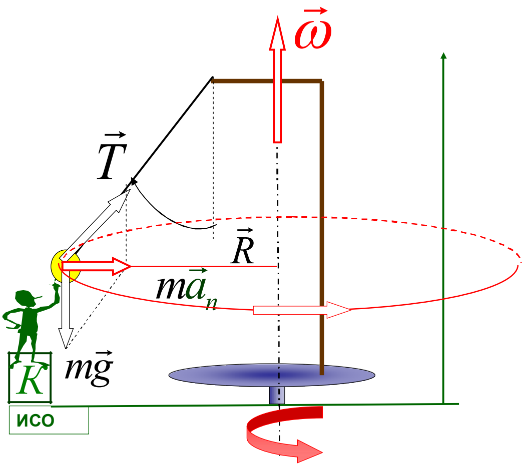


Рис. 4.24. Силы, действующие на тело, с точки зрения наблюдателя $\boxed{\text{К}}$

$$\vec{T} + m\vec{g} = m\vec{a}_n\,, \tag{4.58}$$

$$\vec{a}_n = \vec{w}_n\,, \tag{4.59}$$

$$\vec{T} + m\vec{g} = m\vec{w}_n\,, \tag{4.60}$$

$$\vec{a}_n = \vec{w}_n = -\text{щ}^2\vec{R}\,, \tag{4.61}$$

$$a_n = w_n = -\text{щ}^2 R\,. \tag{4.62}$$

3. Наблюдатель находится во вращающейся системе отсчета $\boxed{\text{К}'}$ (рис. 4.25).

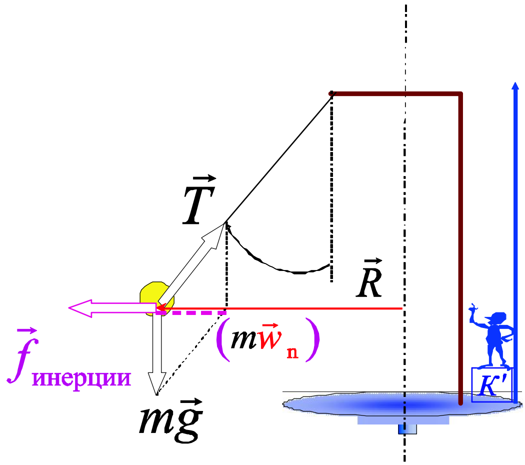


Рис. 4.25. Силы, действующие на тело с точки зрения наблюдателя $\boxed{\text{К}'}$

$$\vec{T} + m\vec{g} + \left(-m\vec{w}_n\right) = 0\,, \tag{4.63}$$

$$\vec{T} + m\vec{g} + \vec{f}^{\,\text{цб}}_{\text{инерции}} = 0\,,9, \tag{4.64}$$

где $\vec{f}^{\,\text{цб}}_{\text{инерции}}$ – центробежная сила инерции.

$$\vec{f}^{\,\text{цб}}_{\text{инерции}} = -m\vec{w}_n = m\text{щ}^2\vec{R}\,. \qquad (4.65)$$

В НИСО $\boxed{\text{К'}}$ появляется *центробежная сила инерции*.

4.10.4. Сила инерции Кориолиса

Сила инерции Кориолиса возникает во вращающейся (неинерциальной) системе отсчета (например, на Земле) только при движении тела в ней со скоростью $\vec{u}\,'$ (рис. 4.26).

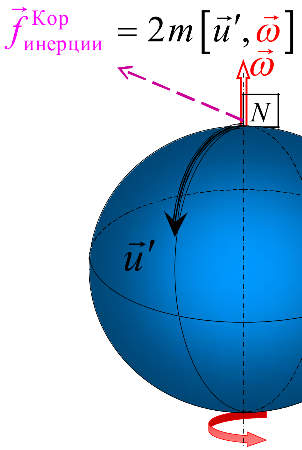


Рис. 4.26. Возникновение силы Кориолиса

$$\vec{f}^{\,\text{Кор}}_{\text{инерции}} = 2m\left[\vec{u}\,',\vec{\omega}\right]. \qquad (4.66)$$

4.10.5. Эффективное ускорение свободного падения

Рассмотрим Землю в собственном вращении как неинерциальную систему отсчета, в которой на тело действует центробежная сила инерции (рис. 4.27).

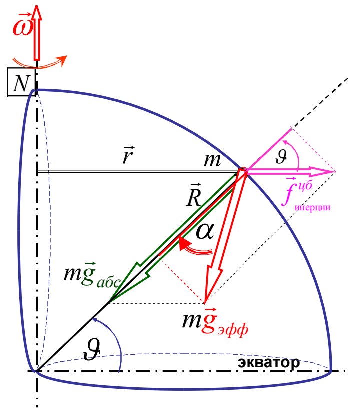


Рис. 4.27. Возникновение эффективного ускорения свободного падения

Тело покоится ($\vec{u}'=0$), поэтому не учитывается сила Кориолиса.

Основной закон динамики в НИСО «Земля»:

$$m\vec{g}_{\text{эфф}} = m\vec{g}_{\text{абс}} + \vec{f}^{\,\text{цб}}_{\text{инерции}} \tag{4.67}$$

или

$$m\vec{g}_{\text{эфф}} = -\gamma \frac{mM}{R^3}\vec{R} + m\omega^2\vec{r}\,, \tag{4.68}$$

где

$$\vec{g}_{\text{абс}} = -\gamma \frac{mM}{R^3}\vec{R} \tag{4.69}$$

– ускорение свободного падения (абсолютное), вызываемое действием поля тяготения Земли.

В НИСО «Земля» возникает результирующее (эффективное) ускорение свободного падения (см. рис. 4.27):

$$\vec{g}_{\text{эфф}} = \vec{g}_{\text{абс}} + \omega^2\vec{r}\,. \tag{4.70}$$

В проекции на направление $\vec{R}$

$$-g_{\text{эфф}}\cos\alpha = -g_{\text{абс}} + \omega^2 r\cos\vartheta\,, \tag{4.71}$$

где $0° \le \vartheta \le 90°$ – географическая широта,

$$g_{\text{абс}} = \gamma \frac{M}{R^2}. \qquad (4.72)$$

Или

$$g_{\text{эфф}} \cos\alpha = g_{\text{абс}} - \omega^2 r \cos\vartheta. \qquad (4.73)$$

Так как $\alpha \to 0°$, то $\cos\alpha \to 1$.

Подставим $r = R\cos\vartheta$. Тогда

$$g_{\text{эфф}} = g_{\text{абс}} - \omega^2 R \cos^2\vartheta. \qquad (4.74)$$

Так как форма Земли близка к поверхности эллипсоида вращения (так называемый *геоид*), и экваториальный радиус Земли больше полярного, то на экваторе ($\vartheta = 0°$) $g_{\text{эфф}}^{\text{экватор}} = 9{,}78\ \text{м/с}^2$, а на полюсе ($\vartheta = 90°$) $g_{\text{эфф}}^{\text{полюс}} = 9{,}83\ \text{м/с}^2$.

Контрольные вопросы

1. В каких системах отсчета справедливы законы Ньютона?
2. Какие формулировки второго закона Ньютона вы знаете?
3. Чему равен вес свободно падающего тела?
4. Какой знак имеет скалярное произведение силы трения и скорости тела?
5. Какова связь между кинетической энергией материальной точки и работой приложенных к точке сил?
6. Как связана потенциальная энергия материальной точки с работой консервативных сил?
7. Работа силы, действующей на материальную точку, на любом пути равна нулю. Что можно сказать о взаимном направлении силы и скорости материальной точки?
8. Сила, действующая на материальную точку, изменяется по закону $\vec{F}(t)$, а скорость точки – по закону $\vec{v}(t)$. Чему равна мощность в момент t?
9. Являются ли силы трения консервативными?
10. От каких величин зависит угловое ускорение тела?
11. Чему равно ускорение центра масс тела, имеющего массу m и находящегося под действием сил $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$?

12. Как изменится модуль центробежной силы инерции, если скорость вращения системы отсчета увеличить в n раз?

13. Может ли сила Кориолиса изменить скорость частицы?

14. Чему равна сила Кориолиса в случае, когда скорость частицы параллельна оси вращения системы отсчета?

15. Велосипедист, движущийся по дуге окружности с постоянной скоростью, наклоняется к горизонту. Как это объяснит наблюдатель инерциальной системе отсчета «Земля» и неинерциальной системе отсчета, связанной с велосипедистом?

Примеры решения задач

Пример 4.1. Однородный шар массой m скатывается с наклонной плоскости высотой h (рис. 4.28). Найдите конечную линейную скорость движения шара (на выходе с наклонной плоскости).

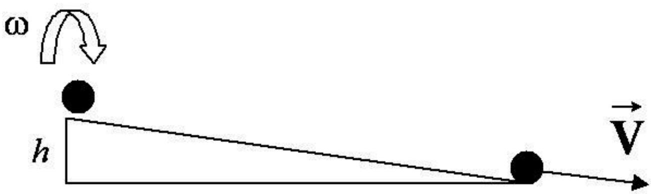


Рис. 4.28

Решение

I способ – энергетический

Движение осуществляется в результате превращения потенциальной энергии шара в кинетическую энергию поступательного и вращательного движения шара:

$$mgh = \frac{m\mathrm{v}^2}{2} + \frac{\Im\omega^2}{2}. \qquad (4.75)$$

Здесь мы пренебрегаем затратами энергии на преодоление трения качения.

Момент инерции шара (3.36) относительно оси, проходящей через его центр инерции

$$\Im = \frac{2}{5}mR^2. \qquad (4.97)$$

Угловая скорость ω связана с линейной скоростью v соотношением (2.40):

$$\omega = \frac{\text{v}}{R}. \tag{4.98}$$

Из кинематических уравнений (2.26) для движения получаем:

$$\left.\begin{aligned} \ell &= \frac{at^2}{2} \\ \text{v} &= at \end{aligned}\right\}, \tag{4.99}$$

где ℓ – длина наклонной плоскости.

Из уравнений (4.99) следует

$$\text{v}^2 = 2a\ell. \tag{4.100}$$

Из геометрии

$$\ell = \frac{h}{\sin\alpha}. \tag{4.101}$$

Тогда из формулы (4.96) с учетом (4.97) – (4.101) получим

$$mgh = \frac{m\text{v}^2}{2} + \frac{m\text{v}^2}{5} = \frac{7}{10} m\text{v}^2. \tag{4.102}$$

Окончательный результат

$$\text{v} = \sqrt{\frac{10}{7} gh}. \tag{4.103}$$

II способ – динамический

На шар (рис. 4.29) действуют три силы – тяжести $m\vec{g}$, нормальной реакции опоры $\vec{N}$ и трения $\vec{F}_{\text{тр}}$.

Рассмотрим поступательное движение шара как материальной точки. Указанные выше три силы приложены в центре инерции – точке *C*.

Уравнение основного закона динамики материальной точки (второй закон Ньютона) (4.26):

$$m\vec{g} + \vec{F}_{\text{тр}} + \vec{N} = m\vec{a}. \tag{4.104}$$

В проекциях на оси координат

$$
\left.\begin{aligned}
X:&\quad mg\sin\alpha - F_{\text{тр}} = ma,\\
Y:&\quad -mg\cos\alpha + N = 0,
\end{aligned}\right\} \qquad (4.105)
$$

где α – предполагаемый угол между наклонной плоскостью и ее основанием.

Вращающий момент может быть создан или силой трения относительно центра инерции (т. C), или силой тяжести относительно мгновенного центра вращения (т. O) (рис. 4.30).

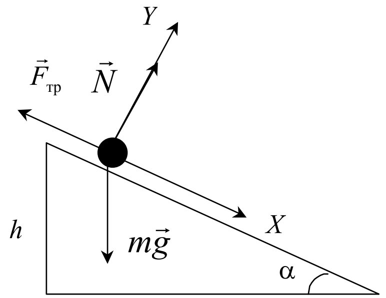
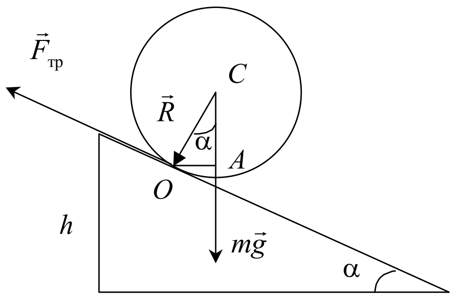


Рис.4.29



б

Рис. 4.30

1. Рассмотрим случай, когда вращение относительно центра инерции (т. C) создается силой трения $\vec{F}_{\text{тр}}$ (см. рис. 4.30).

Уравнение основного закона динамики (4.31) для осевого вращения шара:

$$\vec{M} = \left[\vec{R}, \vec{F}_{\text{тр}}\right] = \mathfrak{I}_C \vec{\beta}, \qquad (4.106)$$

где $\vec{\beta}$ – угловое ускорение шара;

$\mathfrak{I}_C$ – момент инерции шара относительно оси, проходящей через т. C.

В проекции на ось вращения, проходящую через т. C, уравнение (4.106) запишется так:

$$RF_{\text{тр}} = \mathfrak{I}_C \beta. \qquad (4.107)$$

Поскольку в соответствии с (3.36)

$$\mathfrak{I}_C = \frac{2}{5} mR^2, \qquad (4.108)$$

а

$$\beta = \frac{a}{R}, \qquad (4.109)$$

где a – тангенциальное ускорение шара в прямолинейном поступательном движении (2.32), то уравнение (4.106) может быть записано так:

$$RF_{\text{тр}} = \frac{2}{5} mR^2 \frac{a}{R}, \quad \text{или} \quad F_{\text{тр}} = \frac{2}{5} ma \;. \qquad (4.110)$$

Объединим в систему уравнения (4.105) и (4.110). Получим

$$\left.\begin{aligned} mg\sin\alpha - F_{\text{тр}} &= ma, \\ F_{\text{тр}} &= \frac{2}{5} ma. \end{aligned}\right\} \qquad (4.111)$$

где угол $\alpha = \angle \text{OCA}$.

Отсюда

$$mg\sin\alpha = \frac{7}{5} ma, \quad \text{или} \quad g\sin\alpha = \frac{7}{5} a \;. \qquad (4.112)$$

Поскольку из кинематики известно, что

$$\mathrm{v}^2 = 2\alpha\ell, \qquad (4.113)$$

а из геометрии известно, что

$$\ell = \frac{h}{\sin\alpha}, \qquad (4.114)$$

то после подстановки в (4.113) формул (4.114) и (4.112) получим

$$\mathrm{v} = \sqrt{\frac{10}{7}gh}, \qquad (4.115)$$

что совпадает с результатом (4.103).

2. Рассмотрим случай, когда вращение относительно т. O создается силой тяжести $m\vec{g}$ (см. рис. 4.34).

Уравнение основного закона динамики (4.31) для осевого вращения

$$\vec{M} = \left[\vec{R}, m\vec{g}\right] = \Im_0\vec{\beta}, \qquad (4.116)$$

или, в проекции на мгновенную ось вращения, проходящую через т. O,

$$Rmg\sin\alpha = \Im_0\beta, \qquad (4.117)$$

где $\alpha = \angle OCA$ – равен углу между наклонной плоскостью и ее основанием, а $\beta = \dfrac{a}{R}$.

Произведение $R\sin\alpha = OA$ (см. рис. 4.34) представляет собой плечо силы тяжести. Момент инерции шара относительно оси, проходящей через т. O, найдем по теореме Штейнера (3.30):

$$\Im_0 = \Im_C + mR^2. \qquad (4.118)$$

Таким образом, уравнение (4.117) может быть переписано в виде

$$Rmg\sin\alpha = \left(\frac{2}{5}mR^2 + mR^2\right)\frac{a}{R}. \qquad (4.119)$$

Поскольку из кинематики следует, что

$$\mathrm{v}^2 = 2\alpha\ell, \qquad (4.120)$$

а из геометрии известно, что

$$\ell = \frac{h}{\sin\alpha}, \tag{4.121}$$

то после подстановки (4.119) и (4.121) в (4.120) получим

$$\text{v} = \sqrt{\frac{10}{7}gh}, \tag{4.122}$$

что совпадает с результатами (4.103) и (4.15).

Пример 4.2. Через блок в виде диска массой m_0 перекинута невесомая и нерастяжимая нить, к концам которой подвешены грузики массами m_1 и m_2 ($m_2 > m_1$) (рис. 4.31). Трением в системе блок – ось следует пренебречь. С каким ускорением будут двигаться грузики, если их предоставить самим себе?

Решение

I способ – энергетический

Пусть в начальный момент времени грузики закреплены на одном уровне (см. рис. 4.31). Если предоставить грузики самим себе, то грузик m_2 ($m_2 > m_1$) опустится вниз на расстояние h, а грузик m_1 – поднимется вверх на то же расстояние (вследствие нерастяжимости нитей) (см. рис. 4.31). Источником энергии для движения системы грузиков является высвободившаяся потенциальная энергия U_2 грузика m_2. Эта энергия будет израсходована на увеличение потенциальной энергии U_1 грузика m_1 и сообщение обоим грузикам кинетической энергии K_1 и K_2. Энергия будет израсходована также и на вращение блока (диска) – его кинетическая энергия K_0.

Закон сохранения энергии запишем в виде:

$$U_2 = U_1 + K_1 + K_2 + K_0 \tag{4.123}$$

или, в развернутом виде:

$$m_2gh = m_1gh + \frac{m_1\text{v}_1^2}{2} + \frac{m_2\text{v}_2^2}{2} + \frac{\Im\omega^2}{2}. \tag{4.124}$$

Модули скоростей v_1 и v_2 грузиков m_1 и m_2 будут одинаковыми ($|\vec{\text{v}}_1| = |\vec{\text{v}}_2| = \text{v}$), так как ускорения грузиков одинаковы по модулю из-за нерастяжимости нитей.

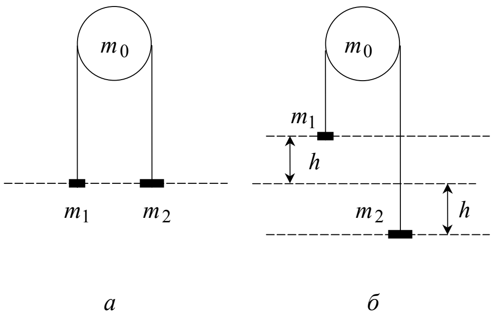


Рис. 4.31

В уравнении (4.124) момент инерции диска равен (3.31):

$$\Im = \frac{1}{2} m_0 R^2,$$

так как ось вращения проходит через центр инерции диска перпендикулярно его плоскости, а угловая скорость вращения блока (диска) в соответствии с (2.40)

$$\omega = \frac{v}{R}, \qquad (4.125)$$

где R – радиус блока.

Записав кинематические уравнения (2.26) для движения грузиков

$$\left.\begin{aligned} h &= \frac{at^2}{2}, \\ v &= at, \end{aligned}\right\} \qquad (4.126)$$

при условии равенства нулю начальной скорости v_0 движения грузиков, получим

$$v^2 = 2ah. \qquad (4.127)$$

Подставив (4.125) и (4.127) в уравнение (4.124), получим

$$m_2 gh = m_1 gh + \frac{m_1 2ah}{2} + \frac{m_2 2ah}{2} + \frac{\frac{1}{2} m_0 R^2 \left(\frac{v}{R}\right)^2}{2}. \qquad (4.128)$$

Отсюда

$$a = g\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2 + \dfrac{m_0}{2}}. \qquad (4.129)$$

II способ – динамический

Сначала рассмотрим поступательное движение грузиков m_1 и m_2 как материальных точек, чьи массы сосредоточены в их центрах инерции (рис. 4.32).

Уравнения второго закона Ньютона (4.26) будут выглядеть так:

$$\left.\begin{aligned} m_1\vec{g} + \vec{T}_1 &= m_1\vec{a}_1 \\ m_2\vec{g} + \vec{T}_2 &= m_2\vec{a}_2 \end{aligned}\right\}. \qquad (4.130)$$

Силы натяжения нитей T_1 и T_2 не могут быть равными, так как мы должны учитывать вращение блока, масса которого не равна нулю. Модули ускорений грузиков равны между собой ($|\vec{a}_1| = |\vec{a}_2| = a$) из-за нерастяжимости нити.

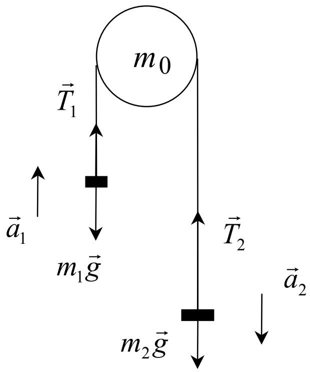


Рис. 4.32

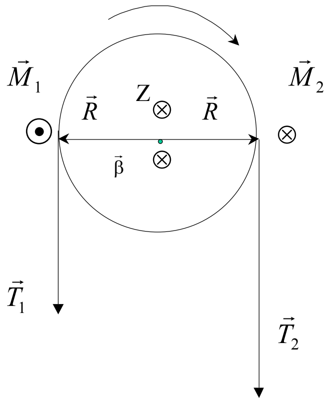
После проецирования векторных уравнений (4.130) на вертикальную ось получаем:

$$\left.\begin{aligned} -m_1 g + T_1 &= m_1 a, \\ -m_2 g + T_2 &= -m_2 a. \end{aligned}\right\} \qquad (4.131)$$

Теперь рассмотрим простое (осевое) вращение блока массой m_0 относительно оси Z, проходящей через центр инерции диска перпендикулярно его плоскости (рис. 4.32).

Вращение блока является результатом совместного действия моментов сил натяжения (4.13):

$$\left.\begin{aligned}\vec{M}_1 &= \left[\vec{R},\vec{T}_1\right],\\ \vec{M}_2 &= \left[\vec{R},\vec{T}_2\right].\end{aligned}\right\} \tag{4.132}$$



Поэтому уравнение основного закона динамики (4.31) для осевого вращения блока представим в виде

$$\left[\vec{R},\vec{T}_1\right]+\left[\vec{R},\vec{T}_2\right]=\Im\vec{\beta}, \tag{4.133}$$

где $\vec{\beta}$ – угловое ускорение вращения блока.

Так как ускорение поступательного и прямолинейного движения грузиков является тангенциальным, то

$$\vec{a}_\tau=\left[\vec{\beta},\vec{R}\right], \tag{4.134}$$

откуда (в модулях)

$$\beta=\frac{a}{R}. \tag{4.135}$$

Момент $\vec{M}_1$ будет вращать блок против часовой стрелки, а момент $\vec{M}_2$ – по часовой стрелке. Принимая направление вращения по часовой стрелке за положительное и с учетом того, что $m_2 > m_1$, после проецирования уравнения (4.133) на ось вращения Z (направлена «от нас») получим

$$-RT_1 + RT_2 = \frac{1}{2} m_0 R^2 \frac{a}{R}. \tag{4.136}$$

Таким образом полная система уравнений динамики для данного движения грузиков и блока имеет вид:

$$\left.\begin{aligned} -m_1 g + T_1 &= m_1 a, \\ -m_2 g + T_2 &= -m_2 a, \\ -RT_1 + RT_2 &= \frac{1}{2} m_0 R^2 \frac{a}{R}. \end{aligned}\right\} \tag{4.137}$$

Решив совместно эти три уравнения, получим

$$a = g \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2 + \dfrac{m_0}{2}}, \tag{4.138}$$

что совпадает с результатом (4.129).

ДОМАШНИЕ ЗАДАНИЯ

1. Пространство и время

1.1. Две релятивистские частицы движутся в лабораторной системе отсчета со скоростями $0{,}6 \cdot c$ и $0{,}9 \cdot c$, соответственно, вдоль одной прямой. Определите их относительную скорость, если частицы движутся в одном направлении.

1.2. В лабораторной системе отсчета удаляются друг от друга две частицы с одинаковыми по модулю скоростями. Их относительная скорость в той же системе отсчета равна $0{,}5 \cdot c$. Определите скорости частиц.

1.3. Ион, вылетев из ускорителя, испустил фотон в направлении своего движения. Определите скорость фотона относительно иона, если скорость иона относительно ускорителя равна $0{,}8 \cdot c$.

1.4. Ускоритель сообщил радиоактивному ядру скорость $0{,}4 \cdot c$. В момент вылета из ускорителя ядро выбросило в направлении своего движения β-частицу со скоростью $0{,}75 \cdot c$ относительно ускорителя. Найдите скорость частицы относительно ядра.

1.5. Две релятивистские частицы движутся в лабораторной системе отсчета со скоростями $0{,}6 \cdot c$ и $0{,}9 \cdot c$ вдоль одной прямой. Определите их относительную скорость, если частицы движутся в противоположных направлениях.

1.6. На фотонной ракете, летящей со скоростью 225 000 км/с относительно Земли, установлен ускоритель, разгоняющий электроны до скорости 240 000 км/с относительно ракеты в направлении противоположном ее движению. Какова скорость этих электронов в системе отсчета «Земля»?

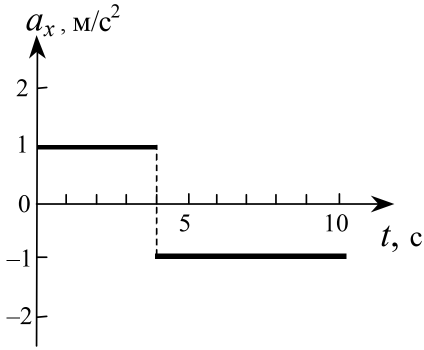
1.7. На фотонной ракете, летящей со скоростью 225 000 км/с относительно Земли, установлен ускоритель, разгоняющий электроны до скорости 240 000 км/с относительно ракеты в направлении ее движения. Какова скорость этих электронов в системе отсчета «Земля»?

1.8. Две частицы движутся навстречу друг другу со скоростями $0{,}50 \cdot c$ и $0{,}75 \cdot c$ по отношению к лабораторной системе отсчета. Найдите их относительную скорость.

2. Кинематика

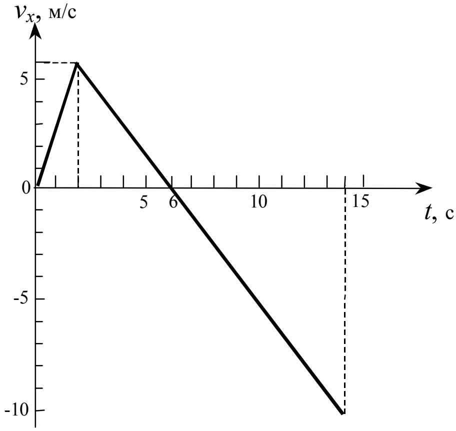
Кинематика прямолинейного движения

2.1.1. Зависимость проекции ускорения от времени при некотором движении тела представлена на рисунке. Определите среднюю путевую скорость за первые 8 с движения. Начальная скорость равна нулю.

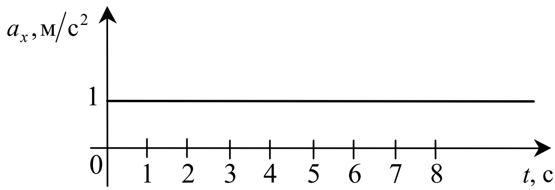


2.1.2. Точка движется вдоль оси X со скоростью, проекция которой v_x как функция времени описывается графиком, приведенном на рисунке. В момент $t = 0$ координата точки $x_0 = 0$. Начертите примерные графики зависимости от времени проекции ускорения a_x, координаты x и пройденного пути S.

2.1.3. На рисунке представлена зависимость проекции скорости на ось OX от времени для движения некоторого тела. Определите среднюю путевую скорость за первые 14 с движения.

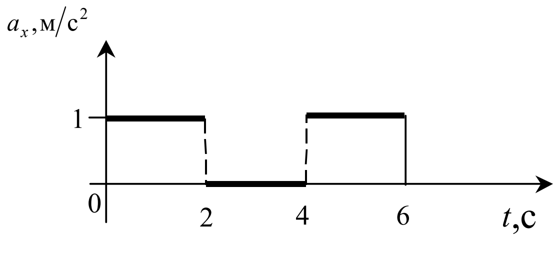


2.1.4. Начертите графики зависимости от времени проекции скорости и пути, пройденного телом, если график зависимости проекции ускорения a_x от времени имеет вид:



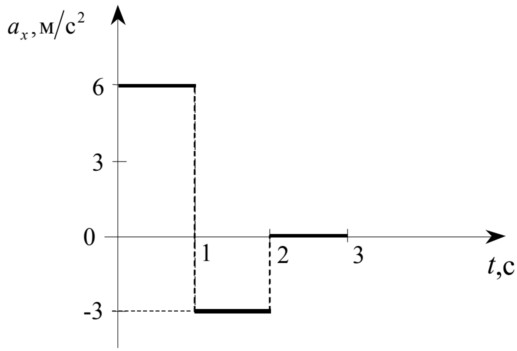
Начальная скорость тела равна нулю.

2.1.5. Начертите графики зависимости от времени проекции скорости и пути, пройденного телом, если график зависимости проекции ускорения a_x от времени имеет вид:

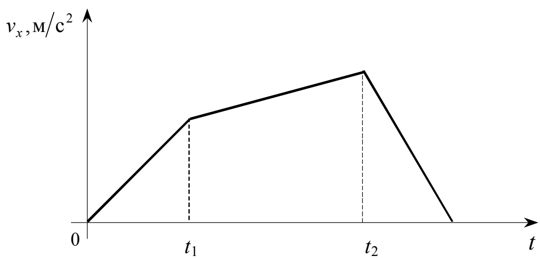


Начальная скорость тела равна нулю.

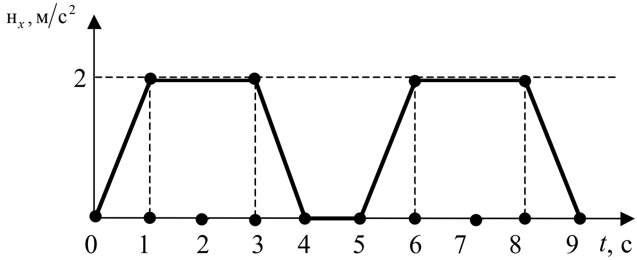
2.1.6. По заданному графику зависимости проекции ускорения автомобиля от времени постройте график зависимости пути от времени и определите путь, пройденный автомобилем за 3 с от начала движения. Начальная скорость автомобиля равна нулю.



2.1.7. На рисунке дан график зависимости проекции скорости тела от времени. Начальная координата $x_0 = 0$. Постройте графики зависимости проекции ускорения, координаты и пути, пройденного телом, от времени.



2.1.8. Начертите графики зависимостей пути и проекции ускорения некоторого тела от времени, если проекция скорости этого тела как функция времени имеет вид:



2.1.9. Уравнение прямолинейного движения имеет вид $x(t) = 3t - 0{,}25t^2$ (м). Выведите уравнения зависимостей $v_x(t)$ и $a_x(t)$. Постройте графики зависимостей координаты, пути, проекций скорости и ускорения от времени для заданного движения.

2.1.10. Движение материальной точки задано уравнением $x(t) = 4t - 0{,}05t^2$ (м). Определите момент времени, в который скорость точки равна нулю. Найдите координату и ускорение в этот момент.

2.1.11. Тело движется прямолинейно. Зависимость пройденного пути от времени определяется уравнением $S(t) = 0{,}5t + t^2$ (м). Выведите формулы зависимости скорости и ускорения от времени. Определите путь, пройденный телом за пятую секунду. Начертите графики зависимости пути, скорости и ускорения от времени.

2.1.12. По заданному уравнению движения лифта $x(t) = 15t + 2t^2$ (м) выведите уравнение зависимости проекции его мгновенной скорости от времени $v(t)$ и постройте график этой зависимости.

2.1.13. Движение материальной точки задано уравнением $x(t) = 0{,}14t^2 + 0{,}01t^3$ (м).

1). Найдите уравнения зависимостей $v_x(t)$ и $a_x(t)$.

2). Через какое время после начала отсчета ускорение тела будет равно 1 м/с^2?

2.1.14. Прямолинейное движение точки описывается уравнением $x(t) = 1 + 3t - 2t^2$ (м). Где находилась точка в начальный момент времени? Как изменяется проекция скорости точки со временем? Когда точка окажется в начале координат?

2.1.15. Движение точки задано уравнением $x(t) = 12t - 2t^2$ (м). Определите среднюю скорость перемещения точки в интервале времени от 1 до 4 с.

2.1.16. Зависимость проекции вектора перемещения от времени выражается уравнением $\Delta r_x = At^2 - Bt^3$, где A и B – постоянные. Постройте графики зависимостей проекций скорости и ускорения от времени. Определите перемещение тела за 3 с, если наибольшая скорость тела равна 3 м/с через 2 с после начала отсчета времени движения.

2.1.17. Из одного и того же места начали равноускоренно двигаться в одном направлении два тела, причем второе тело начинает свое движение через 2 с после первого. v_{01} = 1 м/с, a_1 = 2 м/с^2, v_{02} = 10 м/с, a_2 = 1 м/с^2. Через сколько времени от начала отсчета времени движения первого тела и на каком расстоянии от исходного положения второе тело догонит первое?

2.1.18. Рядом с поездом на одной линии с передними буферами паровоза стоит человек. В тот момент, когда поезд начал движение с ускорением 0,1 м/с^2, человек пошел в том же направлении с постоянной скоростью 1,5 м/с. Где и через какое время поезд догонит человека?

2.1.19. Тело двигалось равнозамедленно и через 6 с остановилось. Определите путь, пройденный телом за это время, если за 2 с до остановки его скорость была 3 м/с.

2.1.20. Скорость поезда, движущегося равнозамедленно, уменьшается в течение 1 мин от 40 до 28 км/ч. Найдите ускорение поезда и расстояние, пройденное им за это время.

2.1.21. При взлете разбег самолета длится 25 с. Определите путь, пройденный самолетом по взлетной полосе, если, пройдя 3/4 длины разбега, самолет приобрел скорость 51 м/с.

2.1.22. Два автомобиля выходят из пункта *A* в одном направлении. Второй автомобиль выходит на 20 с позже первого. Оба движутся равноускоренно с одинаковым ускорением 0,4 м/с^2. Через сколько времени, считая от начала движения первого автомобиля, расстояние между ними окажется равным 240 м?

2.1.23. Поезд, вышедший в 12 часов дня из пункта *A*, движется со скоростью 60 км/ч. Поезд, вышедший в 14 часов из пункта *B*, движется со скоростью 40 км/ч навстречу первому поезду. В котором часу они встретятся, если расстояние *AB* равно 420 км?

2.1.24. В одном направлении из одной точки одновременно начали двигаться два тела: первое – равномерно со скоростью 980 см/с, а второе – равноускоренно без начальной скорости с ускорением 9,8 см/с^2. Через какое время второе тело догонит первое?

Кинематика криволинейного движения

2.2.1. Материальная точка движется по криволинейной траектории согласно уравнению:

$$\vec{r}(t) = \vec{i}At^3 + \vec{j}Bt^2.$$

Выведите уравнения $\vec{\mathrm{v}}(t)$ и $\vec{a}(t)$.

2.2.2. Движение материальной точки задано уравнением $\vec{r}(t) = \vec{i}\left(10 - 5t^2\right) + \vec{j} \cdot 10t$ (м). Выведите уравнение траектории точки и уравнения $\vec{\mathrm{v}}(t)$ и $\vec{a}(t)$. Для момента времени 1 с вычислите модуль скорости.

2.2.3. Движение материальной точки задано уравнением $\vec{r}(t) = \vec{i}\left(10 - 5t^2\right) + \vec{j} \cdot 10t$ (м). Выведите уравнение траектории точки и уравнения $\vec{\mathrm{v}}(t)$ и $\vec{a}(t)$. Для момента времени 1 с вычислите модуль ускорения.

2.2.4. Движение материальной точки задано уравнением $\vec{r}(t) = \vec{i}\left(10 - 5t^2\right) + \vec{j} \cdot 10t$ (м). Выведите уравнение траектории точки и уравнения $\vec{\mathrm{v}}(t)$ и $\vec{a}(t)$. Для момента времени 1 с вычислите модуль скорости и модуль полного ускорения.

2.2.5. Радиус-вектор частицы изменяется со временем по закону $\vec{r}(t) = 3t^2\vec{i} + 2t\vec{j} + 1\vec{k}$ (м). Выведите уравнения скорости и ускорения частицы. Найдите модуль скорости в момент времени 1 с.

2.2.6. Зависимость радиуса-вектора частицы от времени определяется уравнением $\vec{r}(t) = 3t^2\vec{i} + 4t^2\vec{j} + 7\vec{k}$ (м). Вычислите модуль перемещения за первые 10 с движения.

2.2.7. Частица движется со скоростью $\vec{\mathrm{v}}(t) = t\left(2\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}\right)$, (м/с). Найдите модуль скорости частицы в момент времени 1 с и модуль ускорения. Какой характер имеет движение частицы?

2.2.8. Движение материальной точки задано уравнением $\vec{r}(t) = 0{,}5\left(\vec{i}\cos 5t + \vec{j}\sin 5t\right)$ (м). Выведите уравнение траектории точки. Определите модуль скорости и модуль нормального ускорения.

2.2.9. Колесо вращается с постоянным угловым ускорением 2 с$^{-2}$. Через 0,5 с после начала движения полное ускорение колеса стало равным 13,6 см/с^2. Найдите радиус колеса.

2.2.10. Колесо радиусом 5 см вращается так, что зависимость угла поворота радиуса колеса от времени задается уравнением $\varphi = t^3$ (рад). Найдите для точек, лежащих на ободе колеса, изменение модуля тангенциального ускорения за каждую секунду движения.

2.2.11. Движение точки по кривой задано уравнениями $x(t) = t^3$ (м) и $y(t) = 2t$ (м). Найдите скорость точки и ее полное ускорение в момент времени 0,8 с.

2.2.12. Колесо радиусом 0,1 м вращается так, что зависимость от времени угла поворота радиуса колеса задается уравнением $\varphi = 2t + t^3$ (рад). Для точек, лежащих на ободе колеса, найдите угловую скорость и тангенциальное ускорение через 2 с после начала отсчета времени.

2.2.13. Колесо радиусом 0,1 м вращается так, что зависимость от времени угла поворота радиуса колеса задается уравнением $\varphi = 2t + t^3$ (рад). Для точек, лежащих на ободе колеса, найдите линейную скорость и полное ускорение через 2 с после начала отсчета времени.

2.2.14. Компоненты скорости частицы (м/с) изменяются со временем по законам: $v_x = A\cos\omega t$, $v_y = A\sin\omega t$, $v_z = 0$, где A и ω – константы. Найдите модули скорости и ускорения, а также угол α между векторами скорости и ускорения. На основании полученных результатов сделайте заключение о характере движения частицы.

2.2.15. Твердое тело вращается вокруг неподвижной оси по закону $\varphi = 6t - 2t^3$ (рад). Найдите угловое ускорение в момент остановки тела.

2.2.16. Движение определяется уравнениями: $x(t) = 250t$ (м) и $y(t) = 430t - 4{,}9t^2$ (м). Выведите уравнение траектории движения. Найдите скорость в начальный момент времени и полное ускорение тела.

2.2.17. Движение точки по окружности радиусом 4 м задано уравнением $S(t) = 10 - 2t + t^2$ (м), где S – путь, отсчитываемый вдоль траектории. Найдите тангенциальное, нормальное и полное ускорения точки в момент времени 2 с.

2.2.18. Точка движется по окружности радиусом 2 м. Зависимость пути от времени выражена уравнением $S(t) = 2t^3$ (м). В какой момент времени тангенциальное ускорение будет равно нормальному? Определите полное ускорение точки в этот момент времени.

2.2.19. Колесо вращается так, что зависимость угла поворота радиуса колеса от времени задается уравнением $\varphi = 1 + t^2 + t^3$ (рад). Найдите радиус колеса, если известно, что к концу второй секунды движения нормальное ускорение точек, лежащих на ободе колеса, равно 346 м/с^2.

2.2.20. Точка движется по окружности радиусом 2 см. Зависимость пути от времени выражена уравнением $S(t) = 0{,}1t^3$ (см). Найдите нормальное и тангенциальное ускорения точки в момент времени, когда ее линейная скорость равна 0,3 м/с.

2.2.21. Движение точки по окружности задается уравнением $S(t) = -\ 2t + t^2$ (м), где S – путь, отсчитываемый вдоль траектории. Найдите радиус окружности, линейную скорость точки, ее нормальное, тангенциальное и полное ускорения через 3 с после начала отсчета времени, если известно, что нормальное ускорение через 2 с равно 0,5 м/с^2.

2.2.22. Колесо радиусом 5 см вращается так, что зависимость угла поворота радиуса колеса от времени задается уравнением $\varphi(t) = A + Bt + Ct^2 + Dt^3$ (рад), где $D = 1$ рад/с^3. Найдите для точек, лежащих на ободе колеса, изменение модуля тангенциального ускорения за каждую секунду движения.

2.2.23. Движение материальной точки определяется уравнениями $x(t) = 4 + 5t^2$ (м) и $y(t) = 3t^2$ (м). Найдите зависимость перемещения, скорости и ускорения от времени. По какой траектории движется м.т.?

2.2.24. Колесо радиусом 0,1 м вращается так, что зависимость от времени угла поворота радиуса колеса задается уравнением $\varphi = 2t + t^3$ (рад). Для точек, лежащих на ободе колеса, найдите угловое и нормальное ускорения через 2 с после начала отсчета времени.

3. Законы сохранения

Законы сохранения импульса и энергии

3.1.1. Снаряд массой 10 кг имел в верхней точке параболической траектории скорость 200 м/с. В этой точке он разорвался на две части. Меньшая, массой 3 кг, получила скорость 400 м/с в прежнем направлении. Найдите скорость большей части снаряда после разрыва.

3.1.2. Снаряд массой 10 кг в верхней точке параболической траектории имел скорость 200 м/с. В этой точке он разорвался на две части. Меньшая, массой 3 кг, получила скорость 400 м/с и полетела вперед и вверх под углом 60° к горизонту. Найдите, с какой скоростью и под каким углом к горизонту полетит более тяжелая часть снаряда?

3.1.3. На рельсах стоит платформа массой 10 т. На платформе укреплено орудие массой 5 т, из которого произведен выстрел вдоль рельсов. Масса снаряда 100 кг, его скорость относительно орудия в момент выстрела 500 м/с. На какое расстояние откатится платформа? Коэффициент трения платформы о рельсы равен 0,002.

3.1.4. На платформе массой 10 т укреплено орудие массой 5 т, из которого произведен выстрел вдоль рельсов. Масса снаряда 100 кг, его скорость относительно орудия в момент выстрела 500 м/с. Какое расстояние пройдет платформа после выстрела, если до выстрела она двигалась по инерции со скоростью 18 км/ч, а выстрел был произведен в направлении ее движения? Коэффициент трения платформы о рельсы равен 0,002.

3.1.5. На платформе массой 10 т укреплено орудие массой 5 т, из которого произведен выстрел вдоль рельсов. Масса снаряда 100 кг, его скорость относительно орудия в момент выстрела 500 м/с. Какое расстояние пройдет платформа после выстрела, если до выстрела она двигалась по инерции со скоростью 18 км/ч, а выстрел был произведен против направления ее движения? Коэффициент трения платформы о рельсы равен 0,002.

3.1.6. Снаряд массой 1 кг разрывается на два осколка в верхней точке параболической траектории на высоте 60 м. В момент разрыва скорость снаряда была равна 100 м/с. Первый осколок массой 0,6 кг полетел вертикально вниз и достиг Земли через 0,5 с. Найдите скорость второго осколка сразу после разрыва.

3.1.7. Снаряд массой 9 кг в верхней точке параболической траектории разорвался на два осколка. Осколок массой 3 кг полетел в обратном направлении с горизонтальной скоростью 300 м/с. Определите скорость второго осколка, если скорость снаряда в момент разрыва равна 250 м/с.

3.1.8. Из орудия выстрелили вертикально вверх. Снаряд вылетел из ствола со скоростью 100 м/с и в верхней точке разорвался на два одинаковых осколка. Первый осколок упал на Землю со скоростью 102,5 м/с под точкой разрыва. Определите начальную скорость второго осколка.

3.1.9. Пуля массой 10 г, летевшая со скоростью 600 м/с, попала в баллистический маятник массой 5 кг и застряла в нем. На какую высоту поднялся маятник? Баллистический маятник считайте математическим.

3.1.10. В баллистический маятник массой 5 кг попала горизонтально летящая пуля массой 10 г и застряла в нем. Найдите начальную скорость пули, если маятник, откачнувшись после удара, поднялся на высоту 10 см. Баллистический маятник считайте математическим.

3.1.11. Два груза массами 10 кг и 15 кг подвешены на нитях длиной 2 м так, что грузы соприкасаются между собой. Меньший груз был отклонен на угол 60° от вертикали и отпущен. Определите высоту, на которую поднимутся оба груза после центрального, прямого и абсолютно неупругого удара.

3.1.12. Два шара массами 200 г и 100 г подвешены на параллельных нитях одинаковой длины, соприкасаясь между собой. Первый шар отклоняют так, что его центр поднимается на высоту 4,5 см, и отпускают. На какую высоту поднимутся шары после прямого, центрального и абсолютно неупругого соударения?

3.1.13. Пуля, летящая горизонтально, попадает в центр шара, подвешенного на очень легком жестком стержне, и застревает в нем. Масса пули составляет 0,001 часть массы шара. Расстояние от точки подвеса стержня до центра шара равно 1 м. Найдите скорость пули, если известно, что стержень с шаром отклонился после удара пули на угол 10°.

3.1.14. Два шара массами 0,2 кг и 0,8 кг подвешены на двух параллельных нитях длиной 2 м, касаясь друг друга. Меньший шар отводится на 90° от первоначального положения и отпускается. Найдите скорости шаров после центрального, прямого и абсолютно упругого столкновения.

3.1.15. Ящик с песком, имеющий массу 1 кг, подвешен на тросе длиной 2,5 м. Длина троса значительно больше линейных размеров ящика. Пуля массой 10 г летит в горизонтальном направлении, попадает в центр ящика и застревает в нем. Трос после попадания пули отклоняется на угол 60° от вертикали. Определите начальную скорость пули (перед ударом).

3.1.16. Два шара подвешены на тонких параллельных нитях, касаясь друг друга. Меньший шар отводится от первоначального положения и отпускается. После центрального, прямого и абсолютно упругого удара шары поднимаются на одинаковую высоту. Определите массу меньшего шара, если масса большего 0,6 кг.

3.1.17. Шар массой 200 г, движущийся со скоростью 10 м/с, ударяет неподвижный шар массой 800 г. Удар центральный, прямой и абсолютно упругий. Определите скорости шаров после удара.

3.1.18. Шар массой 1,8 кг сталкивается с покоящимся шаром большей массы. В результате центрального, прямого и абсолютно упругого удара шар потерял 0,36 своей кинетической энергии. Определите массу большего шара.

3.1.19. Из двух соударяющихся абсолютно упругих шаров больший шар покоится. В результате центрального и прямого удара меньший шар потерял 3/4 своей кинетической энергии. Во сколько раз отличаются массы шаров?

3.1.20. Какую часть кинетической энергии может передать частица массой $2 \cdot 10^{-23}$ г, сталкиваясь абсолютно упруго с частицей массой $6 \cdot 10^{-23}$ г, которая до столкновения покоилась? Удар считайте центральным и прямым.

3.1.21. Частица массой $1 \cdot 10^{-25}$ кг обладает импульсом $5 \cdot 10^{-20}$ кг·м/с. Определите, какой импульс может передать эта частица, сталкиваясь абсолютно упруго с частицей массой $4 \cdot 10^{-25}$ кг, которая до соударения покоилась. Удар считайте прямым.

3.1.22. Два шара претерпевают центральный, прямой и абсолютно неупругий удар. До удара шар массой m_2 неподвижен, шар массой m_1 движется с некоторой скоростью. Какая часть первоначальной кинетической энергии теряется при ударе, если: а) $m_1 = m_2$; б) $m_1 = 0{,}1m_2$.

3.1.23. Свинцовый шар массой 500 г, движущийся со скоростью 10 м/с, соударяется с неподвижным шаром из воска, имеющим массу 200 г, после чего оба шара движутся вместе. Найдите кинетическую энергию шаров после соударения. Удар считайте центральным и прямым.

3.1.24. Два тела движутся в горизонтальном направлении навстречу друг другу вдоль одной прямой. После столкновения тела слипаются. Определите скорости тел после столкновения, если масса первого тела равна 0,5 кг, масса второго – 0,9 кг, скорость первого тела до столкновения равна 20 см/с, скорость второго – 40 см/с. Сравните энергию тел до и после удара. Объясните, почему происходит изменение энергии. Удар считайте центральным.

Законы сохранения момента импульса и энергии

3.2.1. Человек стоит на скамье Жуковского и ловит рукой мяч массой 0,4 кг, летящий в горизонтальном направлении со скоростью 20 м/с. Траектория мяча проходит на расстоянии 0,8 м от вертикальной оси вращения скамьи. С какой угловой скоростью начнет вращаться скамья Жуковского с человеком, поймавшим мяч, если суммарный момент инерции человека и скамьи равен 6 кг·м^2?

3.2.2. Однородный стержень длиной 85 см может вращаться вокруг горизонтальной оси, проходящей через его верхний конец. Какую наименьшую скорость надо сообщить нижнему концу, чтобы стержень сделал полный оборот вокруг оси?

3.2.3. На какой угол надо отклонить однородный стержень, который может вращаться вокруг горизонтальной оси, проходящей через его верхний конец, чтобы нижний конец (при прохождении им положения равновесия) имел скорость 5 м/с? Длина стержня 1 м.

3.2.4. Платформа, имеющая форму диска радиусом 1 м, вращается по инерции около вертикальной оси, проходящей через ее центр, с угловой скоростью 6 $мин^{-1}$. На краю платформы стоит человек массой 80 кг. С какой угловой скоростью станет вращаться платформа, если человек перейдет в ее центр? Момент инерции платформы равен 120 $кг\cdot м^2$. Момент инерции человека рассчитывайте как для материальной точки.

3.2.5. Вертикальный столб высотой 5 м, подпиленный у основания, падает на Землю. Определите линейную скорость его верхнего конца в момент удара о Землю.

3.2.6. Платформа в виде диска радиусом 1,5 м и массой 180 кг вращается по инерции около вертикальной оси с частотой 10 $мин^{-1}$. В центре платформы стоит человек массой 60 кг. Какую линейную скорость относительно Земли будет иметь человек, если он перейдет на край платформы? Момент инерции человека рассчитывайте как для материальной точки.

3.2.7. В центре скамьи Жуковского стоит человек и держит в руках металлический стержень, расположенный вертикально по оси вращения скамьи. При этом скамья вращается с угловой скоростью 4 $с^{-1}$. Момент инерции человека и скамьи 6 $кг\cdot м^2$. Длина стержня 1,5 м, его масса 8 кг. Определите частоту вращения скамьи, если человек поворачивает стержень в горизонтальное положение так, что ось вращения скамьи проходит через середину стержня.

3.2.8. Человек стоит на неподвижной скамье Жуковского и ловит мяч массой 0,3 кг, летящий в горизонтальном направлении на расстоянии 60 см от вертикальной оси вращения скамьи. После этого скамья стала вращаться с угловой скоростью 1 $с^{-1}$. Момент инерции человека и скамьи 6 $кг\cdot м^2$. Определите скорость мяча.

3.2.9. Определите линейную скорость центра шара, скатившегося без скольжения с наклонной плоскости высотой 1 м. Начальная скорость шара равна нулю. Потерями энергии на трение качения можно пренебречь.

3.2.10. Сколько времени будет скатываться без скольжения обруч с наклонной плоскости длиной 2 м и высотой 10 см? Начальная скорость обруча равна нулю. Потерями энергии на трение качения следует пренебречь.

3.2.11. С вершины наклонной плоскости одновременно начинают скатываться без скольжения сплошные цилиндр и шар одинаковых масс и радиусов. Определите отношение скоростей этих тел у основания наклонной плоскости. Потерями энергии на трение качения следует пренебречь.

3.2.12. Определите полную кинетическую энергию сплошного цилиндра, имеющего массу m, при качении (без проскальзывания) по плоской поверхности со скоростью v.

3.2.13. Колесо массой 2 кг и внешним радиусом 5 см скатывается (без проскальзывания) с наклонной плоскости длиной 2 м и углом наклона 30°, достигая внизу скорости 2,5 м/с. Определите момент инерции колеса. Начальная скорость колеса равна нулю. Потерями энергии на трение качения следует пренебречь.

3.2.14. Найдите линейную скорость движения центра масс шара, скатывающегося без скольжения с наклонной плоскости. Высота наклонной плоскости 0,5 м, начальная скорость шара равна нулю. Сравните найденную скорость со скоростью тела, соскальзывающего с этой наклонной плоскости. Потерями энергии на трение качения следует пренебречь.

3.2.15. Определите линейную скорость движения центра масс однородного диска, скатывающегося без скольжения с наклонной плоскости. Высота наклонной плоскости 0,5 м, начальная скорость диска равна нулю. Сравните найденную скорость со скоростью тела, соскальзывающего с этой наклонной плоскости. Потерями энергии на трение качения следует пренебречь.

3.2.16. Найдите линейную скорость движения центра масс обруча скатывающегося без скольжения с наклонной плоскости. Высота наклонной плоскости 0,5 м, начальная скорость обруча равна нулю. Потерями энергии на трение качения следует пренебречь. Сравните найденную скорость со скоростью тела, соскальзывающего с этой наклонной плоскости при отсутствии трения.

3.2.17. Горизонтально расположенный деревянный стержень массой 0,8 кг и длиной 1,8 м может вращаться вокруг вертикальной оси, проходящей через его середину. В конец стержня попадает и застревает в нем пуля массой 3 г, летящая перпендикулярно к оси и к стержню со скоростью 50 м/с. Определите угловую скорость, с которой начинает вращаться стержень.

3.2.18. Платформа, имеющая форму диска, может вращаться около вертикальной оси, проходящей через ее центр. На краю платформы стоит человек массой 60 кг. На какой угол повернется платформа, если человек пойдет вдоль края платформы и, обойдя ее, вернется в исходную точку на платформе? Масса платформы равна 240 кг. Момент инерции человека рассчитывайте как для материальной точки.

3.2.19. В центре вращающейся скамьи Жуковского стоит человек, держащий на вытянутых руках на расстоянии 150 см друг от друга две гири. Скамья вращается с частотой 1 Гц. Человек сближает гири до расстояния 80 см, и частота увеличивается до 1,5 Гц. Определите работу, произведенную человеком, если каждая гиря имеет массу 2 кг. Момент инерции человека относительно оси скамьи считайте постоянным, а гири – материальными точками.

3.2.20. Однородный тонкий тяжелый стержень длиной ℓ может вращаться вокруг горизонтальной оси, проходящей через один из его концов. Какую начальную угловую скорость надо сообщить стержню, чтобы он повернулся на 90°?

3.2.21. Человек стоит в центре скамьи Жуковского и держит в руках стержень длиной 2,4 м и массой 8 кг, расположенный вертикально по оси вращения скамьи. Скамья с человеком вращается с угловой скоростью 1 $с^{-1}$. С какой угловой скоростью станет вращаться скамья Жуковского с человеком, если он повернет стержень в горизонтальное положение (середина стержня пройдет через ось вращения)? Суммарный момент инерции человека и скамьи равен 6 $кг \cdot м^2$.

3.2.22. Карандаш длиной 15 см, поставленный вертикально, падает на стол. Какую угловую и линейную скорости будет иметь в конце падения середина карандаша? Считайте, что трение настолько велико, что нижний конец карандаша не проскальзывает.

3.2.23. Однородный стержень длиной $\ell = 85$ см может вращаться вокруг горизонтальной оси, проходящей через точку, находящуюся на расстоянии $d = \dfrac{\ell}{4}$ от его верхнего конца. Какую наименьшую скорость надо сообщить нижнему концу, что бы стержень сделал полный оборот вокруг оси?

3.2.24. Стержень массой 6 кг и длиной 80 см подвешен за верхний конец и может свободно вращаться вокруг горизонтальной оси. В его нижний конец попадает пуля массой 10 г, летящая горизонтально со скоростью 500 м/с перпендикулярно оси вращения, и застревает. Найдите угловую скорость вращения стержня сразу после попадания пули.

4. Силы в природе

Динамика материальной точки

4.1.1. Конькобежец движется по горизонтальному пути равномерно, а затем за 25 с проезжает до остановки путь 60 м равнозамедленно. Определите коэффициент трения.

4.1.2. Трамвай, трогаясь с места, движется с постоянным ускорением 0,5 м/с^2. Через 12 с после начала движения мотор трамвая выключается и трамвай движется до остановки равнозамедленно. На всем пути движения трамвая коэффициент трения равен 0,01. Найдите общее расстояние, пройденное трамваем, и время торможения.

4.1.3. На автомобиль массой 1000 кг во время движения действует сила трения, равная $0{,}1mg$. Чему должна быть равна сила тяги, развиваемая мотором автомобиля, чтобы автомобиль двигался с ускорением 2 м/с^2?

4.1.4. Определите тормозной путь автомобиля массой 1000 кг, движущегося по горизонтальной дороге, если при горизонтальной силе торможения 4000 Н время торможения равно 4 с.

4.1.5. Определите тормозной путь движущегося по горизонтальной дороге автомобиля, если его скорость перед началом торможения 40 м/с. Коэффициент трения между шинами и дорогой 0,8.

4.1.6. Вагон массой 10000 кг движется по горизонтальному пути со скоростью 20 м/с. Какова должна быть горизонтальная сила торможения, чтобы остановить вагон на расстоянии 1000 м? Движение считайте равнозамедленным.

4.1.7. Тележка массой 200 кг движется по горизонтальному пути с ускорением 1 м/с^2 под действием горизонтальной силы 300 Н. Определите коэффициент трения.

4.1.8. Автомобиль массой 1200 кг начинает движение по горизонтальной поверхности с ускорением 1 м/с^2. Чему равна сила тяги автомобиля? Коэффициент трения равен 0,2.

4.1.9. К нити подвешен груз массой 1 кг. Найдите натяжение нити, если нить с грузом начать поднимать с ускорением 5 м/с^2.

4.1.10. К нити подвешен груз массой 1 кг. Найдите натяжение нити, если нить с грузом начали опускать с ускорением 5 м/с^2.

4.1.11. Стальная проволока выдерживает силу натяжения 4400 Н. С каким наибольшим ускорением можно поднимать груз массой 400 кг, подвешенный на этой проволоке, чтобы она при этом не порвалась?

4.1.12. Масса лифта с пассажирами равна 800 кг. Найдите, с каким ускорением движется лифт, если известно, что натяжение троса, удерживающего лифт, равно 12 кН.

4.1.13. Гиря подвешена на нити. Если поднимать эту гирю с ускорением 2 м/с^2, то натяжение нити будет вдвое меньше того натяжения, при котором нить разрывается. С каким ускорением надо поднимать эту гирю, чтобы нить разорвалась?

4.1.14. На нити, выдерживающей натяжение 100 Н, из состояния покоя поднимают груз массой 5 кг вертикально вверх. Определите предельную высоту, на которую можно поднять груз за 0,5 с так, чтобы нить не порвалась. Силу сопротивления считайте постоянной и равной 10 Н.

4.1.15. Веревка выдерживает груз массой 10 кг при подъеме его с некоторым ускорением, направленным по вертикали, и груз массой 90 кг при опускании его с таким же по модулю ускорением. Какова максимальная масса груза, который можно поднять на этой веревке с постоянной скоростью?

4.1.16. Нить выдерживает нагрузку 103 Н. С каким наибольшим ускорением можно поднимать вертикально вверх груз массой 10 кг, чтобы нить не оборвалась?

4.1.17. На гладком столе стоит тележка массой 4 кг. К тележке привязан один конец шнура, перекинутого через невесомый блок, укрепленный на краю стола. С каким ускорением будет двигаться тележка, если к другому концу шнура привязать гирю массой 1 кг?

4.1.18. На гладком столе лежит брусок массой 4 кг. К бруску привязаны два шнура, перекинутые через блоки, прикрепленные к противоположным краям стола. К концам шнуров подвешены гири, массы которых 1 кг и 2 кг. Найдите ускорение, с которым движется брусок, и силу натяжения каждого из шнуров. Массой блоков и трением следует пренебречь.

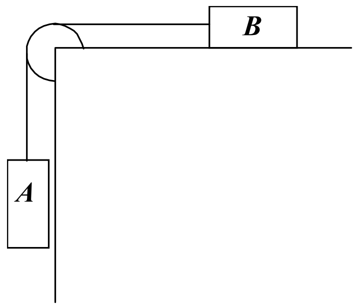
4.1.19. Две гири массами 1 и 3 кг связаны невесомой нерастяжимой нитью, перекинутой через неподвижный блок. На сколько опустится большая гиря за первые 2 с движения, если гири отпустить? Массой блока и трением следует пренебречь.

4.1.20. К концам невесомой и нерастяжимой нити, перекинутой через неподвижный невесомый блок, подвешены два груза массой 1 кг каждый. На один из грузов положен перегрузок массой 0,5 кг. Найдите величину силы, с которой перегрузок давит на груз. Трением следует пренебречь.

4.1.21. Две гири неравной массы висят на концах нити, перекинутой через неподвижный невесомый блок, причем легкая гиря расположена ниже тяжелой на 8 м. Если гири не удерживать, то через 2 с они окажутся на одной высоте. Во сколько раз масса тяжелой гири больше массы легкой?

4.1.22. Тела массами 20 и 5 кг связаны невесомой нерастяжимой нитью. Тело массой 20 кг находится на горизонтальной поверхности, а массой 5 кг висит на нити, перекинутой через невесомый блок, укрепленный у края стола. С каким ускорением будет двигаться тело массой 20 кг, если второе тело отпустить? Трением следует пренебречь.

4.1.23. Невесомый блок укреплен на краю стола. Гири A и B массой по 1 кг соединены нитью и перекинуты через блок. Коэффициент трения гири B о стол равен 0,1. Найдите: 1) ускорение, с которым движутся гири; 2) натяжение нити. Трением в блоке следует пренебречь.



4.1.24. К пружинным весам подвешен блок. Через блок перекинут шнур, к концам которого привязаны грузы массами 1,5 кг и 3 кг. Каково будет показание весов во время движения грузов? Массой блока и шнура следует пренебречь.

Динамика абсолютно твердого тела

4.2.1. Тонкий однородный стержень длиной 50 см и массой 400 г вращается с угловым ускорением 3 $с^{-2}$ вокруг оси, проходящей перпендикулярно стержню через его середину. Определите вращающий момент.

4.2.2. Маховое колесо, имеющее момент инерции 245 кг·м^2, вращается с частотой 20 Гц. Через минуту после того, как на колесо перестал действовать вращающий момент, оно остановилось. Найдите момент сил трения и число оборотов, которое сделало колесо до полной остановки.

4.2.3. Однородный диск радиусом 0,2 м и массой 5 кг вращается вокруг оси, проходящей перпендикулярно плоскости диска через его центр. Зависимость угловой скорости вращения диска от времени дается уравнением $\omega(t) = 8t$ (c^{-1}). Найдите величину касательной силы, приложенной к ободу диска. Трением следует пренебречь.

4.2.4. Вал массой 100 кг и радиусом 5 см вращался с частотой 8 Гц. К цилиндрической поверхности вала прижали тормозную колодку с силой 40 Н, под действием которой вал остановился через 10 с. Определите коэффициент трения.

4.2.5. К ободу колеса, имеющего форму диска радиусом 0,5 м и массой 50 кг, приложена касательная сила 98,1 Н. Найдите: 1) угловое ускорение колеса; 2) через сколько времени после начала действия силы колесо будет вращаться с частотой 100 Гц?

4.2.6. Маховик радиусом 0,2 м и массой 10 кг соединен с мотором при помощи приводного ремня. Натяжение ремня, идущего без скольжения, постоянно и равно 14,7 Н. С какой частотой будет вращаться маховик через 10 с после начала движения? Маховик считайте однородным диском. Трением в осях следует пренебречь.

4.2.7. На горизонтальную ось насажены маховик и легкий шкив радиусом 5 см. На шкив намотан шнур, к которому привязан груз массой 0,4 кг. Опускаясь равноускоренно, груз прошел путь 1,8 м за 3 с. Определите момент инерции маховика. Массу шкива и оси считайте пренебрежимо малой.

4.2.8. Маховик, момент инерции которого 63,6 $кг\cdot м^2$, вращается с постоянной угловой скоростью 31,4 рад/с. Найдите тормозящий момент, под действием которого маховик остановится через 20 с.

4.2.9. К концам невесомой и нерастяжимой нити, перекинутой через закрепленный блок, подвешены два груза массой 1 кг каждый. На один из грузов положен перегрузок массой 0,5 кг. Найдите величину силы, с которой перегрузок давит на груз. Трением в осях следует пренебречь. Блок считайте колесом, масса которого 1 кг распределена равномерно по ободу.

4.2.10. Две гири массами 1 и 3 кг связаны невесомой нерастяжимой нитью, перекинутой через закрепленный блок. На сколько опустится большая гиря за первые 2 с движения, если гири отпустить? Трением в осях следует пренебречь. Блок считайте колесом, масса которого 1 кг распределена равномерно по ободу.

4.2.11. Две гири неравной массы висят на концах нити, перекинутой через закрепленный блок, причем легкая гиря массой 1 кг расположена ниже тяжелой на 8 м. Если гири не удерживать, то через 2 с они окажутся на одной высоте. Во сколько раз масса тяжелой гири больше массы легкой гири? Блок считайте однородным диском массой 1 кг.

4.2.12. К пружинным весам подвешен блок. Через блок перекинут шнур, к концам которого привязали грузы массами 1,5 и 3 кг. Каково будет показание весов во время движения грузов? Массой шнура пренебрегите. Блок считайте колесом, масса которого 1 кг распределена равномерно по ободу.

4.2.13. Тела массами 20 и 5 кг связаны невесомой нерастяжимой нитью. Тело массой 20 кг находится на гладкой горизонтальной поверхности, а тело массой 5 кг висит на нити, перекинутой через блок, укрепленный у края стола. С каким ускорением будет двигаться тело массой 20 кг, если второе тело отпустить? Трением в осях следует пренебречь. Блок считайте колесом, масса которого 1 кг распределена равномерно по ободу.

4.2.14. На гладком столе стоит тележка массой 4 кг. К тележке привязан один конец шнура, перекинутого через укрепленный на столе блок. С каким ускорением будет двигаться тележка, если к другому концу шнура привязать гирю массой 1 кг? Блок считайте колесом, масса которого 1 кг распределена равномерно по ободу.

4.2.15. Блок закреплен на конце стола (см. рис. к задаче 4.1.23). Гири A и B равными массами по 1 кг соединены нитью и перекинуты через блок. Коэффициент трения гири B о стол равен 0,1. Найдите: 1) ускорение, с которым движутся гири, 2) силы натяжения нити. Трением в оси следует пренебречь. Блок считайте однородным диском массой 1 кг.

4.2.16. На гладком столе лежит брусок массой 4 кг. К бруску привязаны два шнура, перекинутые через укрепленные на столе блоки массами по 1 кг, прикрепленные к противоположным краям стола. К концам шнуров подвешены гири, массы которых 1 и 2 кг. Найдите ускорение, с которым движется брусок. трением в осях следует пренебречь. Блоки считайте однородными дисками.

ОТВЕТЫ

1.1	0,652.
1.2	$8{,}04 \cdot 10^7$ м/с.
1.4	$0{,}5 \cdot c$
1.5	0,974.
1.6	37500 км/с.
1.7	$2{,}91 \cdot 10^8$ м/с.
1.8	0,909.
2.1.1.	2 м/с.
2.1.3	4,14 м/с.
2.1.6	10,5 м.
2.1.10	40 с, 80 м, – 0,1 м/с^2.
2.1.11	9,5 м.
2.1.13	12 с.
2.1.14	1 м и 1,78 с.
2.1.15	2 м/с.
2.1.16	6,75 м.
2.1.17	Дважды: через 3,39 с на расстоянии 14,9 м и через 10,6 с на расстоянии 123 м.
2.1.18	45 м и 30 с.
2.1.19	27 м.
2.1.20	– 0,0556 м/с^2 и 567 м.
2.1.21	736 м.

2.1.22	40 с.
2.1.23	17 ч.
2.1.24	200 с.
2.2.2.	14,1 м/с.
2.2.3.	$x = 10 - 0{,}05y^2$; 10 м/с^2.
2.2.4.	14,1 м/с и 10м/с^2
2.2.5.	6,3 м/с.
2.2.6.	500 м.
2.2.7.	5,39 м/с и 5,39 м/с$^{2.}$
2.2.8.	2,5 м/с и 12,5 м/с^2.
2.2.9.	6,08 см.
2.2.10.	0,3 м/с^2.
2.2.11.	2,77 м/с и 4,8 м/с^2.
2.2.12.	14 рад/с и 1,2м/с^2.
2.2.13.	1,4 м/с и 19,6 м/с^2.
2.2.14.	A; $A\omega$; $\alpha = \pi/2$.
2.2.15.	12 с$^{-2}$.
2.2.16.	497 м/с и 9,8 м/с^2.
2.2.17.	2; 1; 2,24 м/с^2.
2.2.18.	0,874 с и 14,8 м/с^2.
2.2.19.	1,35 м.
2.2.20.	4,5 м/с^2 и 0,06 м/с^2.
2.2.21.	4 м/с; 2 м/с^2; 2 м/с^2; 2,83 м/с^2.

2.2.22.	0,3 м/с^2.
2.2.23.	$y = \frac{3}{5}(x-4)$
2.2.24.	12 с$^{-2}$ и 19,6 м/с^2.
3.1.1	114 м/с.
3.1.2	249 м/с и –36,6°.
3.1.3	283 м.
3.1.4	70,8 м.
3.1.5	1,77 км.
3.1.6	306 м/с.
3.1.7	525 м/с.
3.1.8	22,5 м/с.
3.1.9	7,31 см.
3.1.10	702 м/с.
3.1.11	16 см.
3.1.12	0,02 м.
3.1.13	547 м/с.
3.1.14	3,76 и 2,51 м/с.
3.1.15	500 м/с.
3.1.16	0,2 кг.
3.1.17	6 м/с и 4 м/с.
3.1.18	16,2 кг.
3.1.19	3.
3.1.20	0,75.

3.1.21	$8 \cdot 10^{-20}$ кг·м/с.
3.1.22	0,5 и 0,909.
3.1.23	17,9 Дж.
3.1.24	18,6 см/с.
3.2.1.	1,02 рад/с.
3.2.2.	7,07 м/с.
3.2.3.	81° 20'.
3.2.4.	10 мин$^{-1}$.
3.2.5.	12,1 м/с.
3.2.6.	0,942 м/с.
3.2.7.	0,510 Гц.
3.2.8.	33,9 м/с.
3.2.9.	3,74 м/с.
3.2.10.	4,04 с.
3.2.11.	0,966.
3.2.12.	$0{,}75m\text{v}^2$.
3.2.13.	0,0107 кг·м^2.
3.2.14.	2,65 м/с и 3,13 м/с.
3.2.15.	2,56 м/с и 3,13 м/с.
3.2.16.	2,21 м/с и 3,13 м/с.
3.2.17.	0,618 рад/с.
3.2.18.	120°.
3.2.19.	47,6 Дж.

3.2.20.	$\omega = \sqrt{\dfrac{3g}{\ell}}$.
3.2.21.	0,61 рад/с.
3.2.22.	14,0 рад/с и 1,05 м/с.
3.2.23.	5,67 м/с.
3.2.24.	3,11 рад/с.
4.1.1	0,0196.
4. 1.2	219 м и 61,2 с.
4. 1.3	2,98 кН.
4. 1.4	32 м.
4. 1.5	102 м.
4. 1.6	2 кН.
4. 1.7	0,0510.
4. 1.8	3,55 кН.
4. 1.9	14,8 Н.
4. 1.10	4,81 Н.
4. 1.11	1,19 м/с^2.
4. 1.12	5,19 м/с^2.
4. 1.13	13,8 м/с^2.
4. 1.14	1,02 м.
4. 1.15	18 кг.
4. 1.16	0,499 м/с^2.
4. 1.17	1,96 м/с^2.
4. 1.18	1,40 м/с^2; 11,2 Н; 16,8 Н.

4. 1.19	9,81 м.
4. 1.20	3,92 Н.
4. 1.21	1,51.
4. 1.22	1,96 м/с^2.
4. 1.23	4,41 м/с^2 и 5,40 Н.
4. 1.24	39,2 Н.
4.2.1.	0,025 Н·м.
4.2.2.	513 Н·м и 600 оборотов.
4.2.3.	4,0 Н.
4.2.4.	0,314.
4.2.5.	7,85 с$^{-2}$; через 80,0 с.
4.2.6.	23,4 Гц.
4.2.7.	0,0235 кг·м^2.
4.2.8.	99,9 Н·м.
4.2.9.	4,20 Н.
4.2.10.	7,85 м.
4.2.11.	1,64 кг.
4.2.12.	49,9 Н.
4.2.13.	1,89 м/с^2.
4.2.14.	1,64 м/с$^{2.}$
4.2.15.	3,53 м/с^2 ; 6,28 и 4,51 Н.
4.2.16.	1,23 м/с^2.

Приложение

Таблица физических величин

Скорость света в вакууме $c = 3\cdot10^{8}$ м/с	Расстояние от центра Солнца до центра Земли $1{,}49\cdot10^{11}$ м
Радиус Земли $R_З = 6{,}37\cdot10^{6}$ м	Масса Земли $M_З = 5{,}98\cdot10^{24}$ кг
Радиус Солнца $R_С = 6{,}95\cdot10^{8}$ м	Масса Солнца $M_С = 1{,}98\cdot10^{30}$ кг
Ускорение свободного падения $g = 9{,}81$ м/с^2	Гравитационная постоянная $\gamma = 6{,}67\cdot10^{-11}$ Н·м^2/кг^2
Элементарный заряд $e = 1{,}60\cdot10^{-19}$ Кл	Масса покоя электрона $m_e = 9{,}11\cdot10^{-31}$ кг
Масса покоя протона $m_p = 1{,}67\cdot10^{-27}$кг	Масса покоя нейтрона $m_n = 1{,}68\cdot10^{-27}$кг
Магнитная постоянная $\mu_0 = 4\pi\cdot10^{-7}$ Гн/м	Электрическая постоянная $\varepsilon_0 = 8{,}85\cdot10^{-12}$ Ф/м
Электрическая постоянная в законе Кулона $k = (4\pi\varepsilon_0)^{-1} = 9\cdot10^{9}$ Н·м^2/Кл^2	
Постоянная Планка $h = 6{,}62\cdot10^{-34}$ Дж·с, $\hbar = 1{,}05\cdot10^{-34}$ Дж·с	
Постоянная Вина $b = 2{,}90\cdot10^{-3}$ м·К $b^* = 3{,}69\cdot10^{11}$ с$^{-1}$·К$^{-1}$	
Постоянная Стефана – Больцмана $\sigma = 5{,}67\cdot10^{-8}$ Вт/(м^2·К^4)	Магнетон Бора $\mu_В = 9{,}27\cdot10^{-24}$ Дж/Тл
Атомная единица массы (а.е.м.) $1{,}66\cdot10^{-27}$ кг 931,4 МэВ	
Постоянная Больцмана $k = 1{,}38\cdot10^{-23}$ Дж/К	Универсальная газовая постоянная $R = 8{,}31$ Дж/ (К·моль)
Число $\pi = 3{,}14$	

Множители и приставки для образования десятичных кратных и дольных единиц и их наименований

Кратные			Дольные		
Множитель	Приставка	Обозначение	Множитель	Приставка	Обозначение
10^{18}	экса	Э	10^{-1}	деци	д
10^{15}	пета	П	10^{-2}	санти	с
10^{12}	тера	Т	10^{-3}	милли	м
10^{9}	гига	Г	10^{-6}	микро	мк
10^{6}	мега	М	10^{-9}	нано	н
10^{3}	кило	к	10^{-12}	пико	п
10^{2}	гекто	г	10^{-15}	фемто	ф
10^{1}	дека	да	10^{-18}	атто	а

Библиографический список

Бройль Луи де. Революция в физике. – М.: Атомиздат, 1965. – 231 с.

Волькенштейн В.С. Сборник задач по общему курсу физики. – СПб.: Спец. лит., 1997. – 327с.

Ландау Л.Д., Ахиезер А.И., Лифшиц Е.М. Курс общей физики. Механика и молекулярная физика. – М.: Наука, 1969. – 399 с.

Орир Дж. Физика, т.1. –М.: Мир, 1981.- 336 с.

Рахштадт Ю.А., Чечеткина Н.В. Физика. Физические основы механики: Учеб. пособие. – М.: МИСиС, 2005. – 176 с.

Савельев И.В. Курс физики, т.1. – М.: Наука., 1989. – 352 с.

Хайкин С.Э. Физические основы механики. – М.: Наука, 1971. – 751 с.

Чертов А.Г., Воробьев А.А. Задачник по физике. – М.: Высш. шк., 1988. – 527 с.

Эйнштейн А., Инфельд Л. Эволюция физики. – М.: Гостехиздат, 1948. – 267 с.

Учебное издание

РАХШТАДТ Юрий Александрович

ФИЗИКА

Физические основы механики

Учебное пособие
Часть 1

Редактор *О.В. Андреева*

Компьютерная верстка *А.В. Калинкиной*

Подписано в печать 16.04.09	Бумага офсетная	
Формат $60 \times 90\ ^{1}/_{16}$	Печать офсетная	Уч.-изд. л. 10,88
Рег. № 008	Тираж 150 экз.	Заказ 2182

Государственный технологический университет
«Московский институт стали и сплавов»,
119049, Москва, Ленинский пр-т, 4

Издательский Дом МИСиС,
119049, Москва, Ленинский пр-т, 2
Тел.: 647-23-09, 954-19-22

Отпечатано в типографии Издательского Дома МИСиС,
117419, Москва, ул. Орджоникидзе, 8/9
Тел.: 954-73-94, 954-19-22