

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего
образования
«Национальный исследовательский технологический университет «МИСИС»
Институт базового образования
Кафедра математики

УТВЕРЖДЕНО:

Проректор по образованию



_____ А.А. Волков

« 31 » марта 2023 г.

Дополнительная профессиональная программа
(повышение квалификации)

**Методика преподавания математики (углубленный уровень) в 10-11 классах
(рациональные и иррациональные уравнения и неравенства, модуль в
уравнениях и неравенствах, системы уравнений)
(Инженерный класс в московской школе)**

Разработчик курса:

Ушаков Владимир Кимович,
Д.т.н., профессор кафедры математики

Москва, 2023

РАЗДЕЛ 1. «ХАРАКТЕРИСТИКА ПРОГРАММЫ»

1.1 Цель реализации программы

Цель реализации программы – совершенствование общепрофессиональных компетенций слушателей в области методики преподавания математики (углубленный уровень) в 10-11 классах проекта «Инженерный класс в московской школе» в разделах рациональных и иррациональных уравнений и неравенств, уравнений и неравенств с модулем, систем уравнений.

1.2 Совершенствуемые/формируемые компетенции

№ п/п	Компетенции	Направление подготовки 44.03.01 Педагогическое образование
		Бакалавриат
		Код компетенции
1.	Способен использовать психолого-педагогические технологии в профессиональной деятельности, необходимые для индивидуализации обучения, развития, воспитания, в том числе обучающихся с особыми образовательными потребностями	ОПК-6

1.3 Планируемые результаты обучения

№ п/п	Знать – уметь	Направление подготовки 44.03.01 Педагогическое образование
		Бакалавриат
		Код компетенции
1.	Знать: - классификацию различных типов задач для каждого из разделов алгебры; - технологию решения уравнений, неравенств, систем уравнений типовых и нестандартных задач; - характерные ошибки, допускаемые учащимися. Уметь: - идентифицировать тип конкретной задачи и определять соответствующие технологии ее решения; - решать типовые и нестандартные задачи с уравнениями, неравенствами, системами уравнений для каждого из разделов алгебры	ОПК-6
	Знать: - критерии определения уровня сложности заданий по алгебре данного курса;	ОПК-6

	<p>- технологию составления дифференцированных по уровням сложности диагностических работ по темам алгебры данного курса.</p> <p>Уметь:</p> <p>- составлять дифференцированные по уровням сложности диагностические работы по темам алгебры данного курса в соответствии с критериями.</p>	
--	---	--

1.4. Категории обучающихся: уровень образования – высшее образование, область профессиональной деятельности – обучение математике на уровне среднего общего образования в общеобразовательной организации.

1.5. Форма обучения: очная, с применением дистанционных технологий

1.6. Режим занятий: продолжительность 1-го занятия составляет 2 академических часа, количество занятий в неделю: не менее 2-3 занятий.

1.7. Трудоемкость программы: 36 часов.

РАЗДЕЛ 2. «СОДЕРЖАНИЕ ПРОГРАММЫ»

2.1. Учебный план

п/ п	Наименование разделов и тем	Всего ауд. часов	Виды аудит. учебных занятий, учебных работ		Внеаудит. работа		Формы контроля	Трудоемкость
			Лекции	Практ. занятия	Сам. работа			
1	2	3	4	5	6	7	8	
1	Раздел 1 Рациональные уравнения и неравенства	6	2	4	3		9	
1.1	Рациональные уравнения	3	1	2	1	Входная практическая работа	4	
1.2	Рациональные неравенства	3	1	2	2	Контрольная работа №1	5	
2	Раздел 2 Уравнения и неравенства с модулями	4	1	3	4		8	
2.1	Уравнения с модулями	2	1	1	2		4	
2.2	Неравенства с модулями	2		2	2		4	
3	Раздел 3 Иррациональные уравнения и неравенства	4	1	3	4		8	
3.1	Иррациональные уравнения	3	1	2	2		5	
3.2	Иррациональные неравенства	1		1	2		3	
4	Раздел 4 Системы уравнений	3	1	2	2		5	
4.1	Системы уравнений	3	1	2	2	Контрольная работа №2	5	
5	Раздел 5 Диагностическая работа	3		3	1		4	
5.1	Методика составления дифференцированных по уровню сложности диагностических работ по темам алгебры	3		3	1	Проект	4	
	Выходное тестирование	2		2		Итоговая практическая работа	2	

	Итоговая аттестация					Зачет по совокупности выполненных контрольных работ №№1-2, проекта и итоговой практической работы	
	Итого	22	5	17	14		36

2.2 Календарный учебный график

Наименование раздела, темы	Объем нагрузки	Учебные недели						
		1 неделя	2 неделя	3 неделя	4 неделя	5 неделя	6 неделя	7 неделя
Раздел 1 Рациональные уравнения и неравенства, 1.1 Рациональные уравнения	4	4						
Раздел 1 Рациональные уравнения и неравенства, 1.2 Рациональные неравенства	5	1	4					
Раздел 2 Уравнения и неравенства с модулями, 2.1 Уравнения с модулями	4		2	2				
Раздел 2 Уравнения и неравенства с модулями, 2.2 Неравенства с модулями	4			4				
Раздел 3 Иррациональные уравнения и неравенства, 3.1 Иррациональные уравнения	5				5			
Раздел 3 Иррациональные уравнения и неравенства, 3.1 Иррациональные уравнения	3				1	2		
Раздел 4 Системы уравнений, 4.1 Системы уравнений	5					4	1	
Раздел 5 Диагностическая работа, 5.1 Методика составления дифференцированных по уровню сложности диагностических работ по темам алгебры	4						4	
Выходное тестирование	2							2

2.4. Рабочая программа

Наименование разделов/модулей, тем	Виды учебных занятий	Содержание
1	2	3
Раздел 1 Рациональные уравнения и неравенства		
1.1 Рациональные уравнения	Лекция, 1 час	Линейные, квадратные, биквадратные уравнения. Уравнения, сводящиеся к биквадратным. Способ замены переменной. Однородные уравнения. Оценка частей уравнения. Рациональные уравнения с параметрами.

		Характерные ошибки, допускаемые учащимися. Классификации различных типов задач. Критерии уровня сложности заданий. Технологии решения типовых и нестандартных задач с учетом характерных ошибок.
	Практическое занятие, 2 часа	Цель: совершенствование и формирование умений: идентифицировать тип конкретной задачи и определять технологии ее решения; применять методы и технологии решать рациональные уравнения рассмотренных типов и объяснять особенности формулировки, методов и технологий решения; составлять дифференцируемые по уровням сложности фрагменты диагностической работы, на примере решаемых заданий – рациональные уравнения. Индивидуальная работа слушателей: решение рациональных уравнений рассмотренных типов, определение уровня сложности заданий в соответствии с критериями, с учетом характерных ошибок. Обсуждение вариантов решений и подходов. Работа в малых группах: проектирование заданий диагностической работы по теме раздела 1: «Рациональные уравнения». Совместное подведение итогов работы.
	Самостоятельная работа, 1 час	Входная практическая работа. Решение рациональных уравнений рассмотренных типов. Определение уровня сложности заданий в соответствии с критериями. Проектирование заданий проекта: разработка заданий диагностических работ базового и продвинутого уровней сложности и их развернутое решение по теме раздела 1: «Рациональные уравнения».
1.2 Рациональные неравенства	Лекция, 1 час	Линейные, дробно-линейные, квадратные, рациональные неравенства. Рациональные неравенства с параметрами. Характерные ошибки, допускаемые учащимися. Классификации различных типов задач. Критерии уровня сложности заданий. Технологии решения типовых и нестандартных задач с учетом характерных ошибок.
	Практическое занятие, 2 часа	Цель: совершенствование и формирование умений: идентифицировать тип конкретной задачи и определять технологии ее решения; применять методы и технологии решать рациональные неравенства рассмотренных типов и объяснять особенности формулировки, методов и технологий решения; составлять дифференцируемые по уровням сложности фрагменты диагностической работы, на примере решаемых заданий – рациональные неравенства. Индивидуальная работа слушателей: решение рациональных неравенств рассмотренных типов, определение уровня сложности заданий в соответствии с критериями, с учетом характерных ошибок. Обсуждение вариантов решений и подходов. Работа в малых группах:

		проектирование заданий диагностической работы по теме раздела 1: «Рациональные неравенства». Совместное подведение итогов работы.
	Самостоятельная работа, 2 часа	Определение типа задач. Выбор технологии решения. Решение рациональных неравенств рассмотренных типов. Определение уровня сложности заданий в соответствии с критериями. Проектирование заданий проекта: разработка заданий диагностических работ базового и продвинутого уровней сложности и их развернутое решение по теме раздела 1: «Рациональные неравенства». Контрольная работа №1.
Раздел 2 Уравнения и неравенства с модулями		
2.1 Уравнения с модулями	Лекция, 1 час	Основные понятия. Графики. Метод интервалов для уравнений с модулями. Специальные приемы решения уравнений с модулями. Параметры в уравнениях с модулями. Характерные ошибки, допускаемые учащимися. Классификации различных типов задач. Критерии уровня сложности заданий. Технологии решения типовых и нестандартных задач с учетом характерных ошибок.
	Практическое занятие, 1 час	Цель: совершенствование и формирование умений: идентифицировать тип конкретной задачи и определять технологии ее решения; применять методы и технологии решать уравнения с модулями рассмотренных типов и объяснять особенности формулировки, методов и технологий решения; составлять дифференцируемые по уровням сложности фрагменты диагностической работы, на примере решаемых заданий – уравнения с модулями. Индивидуальная работа слушателей: решение уравнений с модулями рассмотренных типов, определение уровня сложности заданий в соответствии с критериями, с учетом характерных ошибок. Обсуждение вариантов решений и подходов. Работа в малых группах: проектирование заданий диагностической работы по теме раздела 2: «Уравнения с модулями». Совместное подведение итогов работы.
	Самостоятельная работа, 2 часа	Определение типа задач. Выбор технологии решения. Решение уравнений с модулями рассмотренных типов. Определение уровня сложности заданий в соответствии с критериями. Проектирование заданий проекта: разработка заданий диагностических работ базового и продвинутого уровней сложности и их развернутое решение по теме раздела 2: «Уравнения с модулями».

2.2 Неравенства с модулями	Практическое занятие, 2 часа	<p>Цель: совершенствование и формирование умений: идентифицировать тип конкретной задачи и определять технологии ее решения; применять методы и технологии решать неравенства с модулями рассмотренных типов и объяснять особенности формулировки, методов и технологий решения; составлять дифференцируемые по уровням сложности фрагменты диагностической работы, на примере решаемых заданий – неравенства с модулями.</p> <p>Индивидуальная работа слушателей: решение типовых и нестандартных неравенств с модулями рассмотренных типов, используя метод интервалов и специальные приемы решения неравенств с модулями, вложенными модулями, определение уровня сложности заданий в соответствии с критериями, с учетом характерных ошибок.</p> <p>Обсуждение вариантов решений и подходов.</p> <p>Работа в малых группах: проектирование заданий диагностической работы по теме раздела 2: «Неравенства с модулями».</p> <p>Совместное подведение итогов работы.</p>
	Самостоятельная работа, 2 час	<p>Определение типа задач. Выбор технологии решения. Решение неравенств с модулями рассмотренных типов. Определение уровня сложности заданий в соответствии с критериями.</p> <p>Проектирование заданий проекта: разработка заданий диагностических работ базового и продвинутого уровней сложности и их развернутое решение по теме раздела 2: «Неравенства с модулями».</p>
Раздел 3 Иррациональные уравнения и неравенства		
3.1 Иррациональные уравнения	Лекция, 1 час	<p>Способ «возведения в квадрат». Уравнения с кубическими корнями. Способ замены переменной. Однородные уравнения. Оценка частей уравнения. Иррациональные уравнения с параметрами. Классификации различных типов задач. Критерии уровня сложности заданий. Характерные ошибки, допускаемые учащимися. Технологии решения типовых и нестандартных задач с учетом характерных ошибок.</p>
	Практическое занятие, 2 часа	<p>Цель: совершенствование и формирование умений: идентифицировать тип конкретной задачи и определять технологии ее решения; применять методы и технологии решать иррациональные уравнения рассмотренных типов и объяснять особенности формулировки, методов и технологий решения; составлять дифференцируемые по уровням сложности фрагменты диагностической работы, на примере решаемых заданий – иррациональные уравнения</p> <p>Индивидуальная работа слушателей: решение иррациональных уравнений рассмотренных типов, определение уровня сложности заданий в соответствии с критериями.</p> <p>Обсуждение вариантов решений и подходов.</p>

		Работа в малых группах: проектирование заданий диагностической работы по теме раздела 3: «Иррациональные уравнения». Совместное подведение итогов работы.
	Самостоятельная работа, 2 часа	Определение типа задач. Выбор технологии решения. Решение иррациональных уравнений рассмотренных типов. Определение уровня сложности заданий в соответствии с критериями. Проектирование заданий проекта: разработка заданий диагностических работ базового и продвинутого уровней сложности и их развернутое решение по теме раздела 3: «Иррациональные уравнения».
3.2 Иррациональные неравенства	Практическое занятие, 1 час	Цель: совершенствование и формирование умений: применять методы и технологии решать иррациональные неравенства рассмотренных типов и объяснять особенности формулировки, методов и технологий решения; составлять дифференцируемые по уровням сложности фрагменты диагностической работы, на примере решаемых заданий – иррациональные неравенства. Индивидуальная работа слушателей: знакомство с основными видами иррациональных неравенств и способами их решения; решение иррациональных неравенств рассмотренных типов, определение уровня сложности заданий в соответствии с критериями, с учетом характерных ошибок. Обсуждение вариантов решений и подходов. Работа в малых группах: проектирование заданий диагностической работы по теме раздела 3: «Иррациональные неравенства». Совместное подведение итогов работы.
	Самостоятельная работа, 2 часа	Определение типа задач. Выбор технологии решения. Решение иррациональных уравнений рассмотренных типов. Определение уровня сложности заданий в соответствии с критериями. Проектирование заданий проекта: разработка заданий диагностических работ базового и продвинутого уровней сложности и их развернутое решение по теме раздела 3: «Иррациональные неравенства»
Раздел 4 Системы уравнений		
4.1 Системы уравнений	Лекция, 1 час	Системы линейных уравнений. Системы нелинейных уравнений. Системы с параметром. Сложные системы. Классификации различных типов задач. Критерии уровня сложности заданий. Характерные ошибки, допускаемые учащимися. Технологии решения типовых и нестандартных задач с учетом характерных ошибок.
	Практическое занятие,	Цель: совершенствование и формирование умений: применять методы и технологии решать системы уравнений рассмотренных типов и объяснять особенности

	2 часа	<p>формулировки, методов и технологий решения; составлять дифференцируемые по уровням сложности фрагменты диагностической работы, на примере решаемых заданий – системы уравнений.</p> <p>Индивидуальная работа слушателей: решение систем уравнений рассмотренных типов, определение уровня сложности заданий в соответствии с критериями.</p> <p>Обсуждение вариантов решений и подходов.</p> <p>Работа в малых группах: проектирование заданий диагностической работы по теме раздела 4: «Системы уравнений».</p> <p>Совместное подведение итогов работы.</p>
	Самостоятельная работа, 2 часа	<p>Определение типа задач. Выбор технологии решения.</p> <p>Решение систем уравнений рассмотренных типов.</p> <p>Определение уровня сложности заданий в соответствии с критериями.</p> <p>Проектирование заданий проекта: разработка заданий диагностических работ базового и продвинутого уровней сложности и их развернутое решение по теме раздела 4: «Системы уравнений».</p> <p>Контрольная работа №2.</p>
Раздел 5 Диагностическая работа		
5.1 Методика составления дифференцированных по уровню сложности диагностических работ по темам алгебры	Практическое занятие, 3 часа	<p>Работа в малых группах: определение уровня сложности заданий в соответствии с критериями и составление дифференцированных по уровню сложности диагностических работ по темам разделов 1-4; идентификация типа конкретной задачи и определение технологии ее решения. Обсуждение вариантов решений и подходов.</p> <p>Совместное подведение итогов работы.</p>
	Самостоятельная работа, 1 час	<p>Проект «Диагностическая работа»: составление дифференцированных по уровню сложности диагностических работ по алгебре (по темам разделов 1 – 4)</p>
Выходное тестирование	Практическое занятие, 2 часа	Итоговая практическая работа
Итоговая аттестация		Зачет по совокупности выполненных контрольных работ №№1-2, проекта и итоговой практической работы

РАЗДЕЛ 3. «ФОРМЫ АТТЕСТАЦИИ И ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ»

3.1. Текущий контроль

Программой предусмотрены: входная практическая работа, контрольные работы №1 и №2 по темам разделов 1-4, проект «Диагностическая работа», выходное тестирование.

3.1.1 Входная практическая работа

В ходе курса слушатели выполняют входную практическую работу, направленную на определение уровня сформированности компетенций ОПК-6 и выявление проблемных зон слушателей.

Типовые варианты заданий входной практической работы

1. Решите неравенство:

$$\frac{2x^2 - 2x}{x^2 - x + 1} < \frac{2x^2 - 2x - 2}{x^2 - x - 2} - 1$$

2. Решите уравнение:

$$\sqrt{2x-3} + \sqrt{4x+1} = 4$$

2. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{5x-4y}{4} - 1 = 2x + 2 \\ \frac{3x-2y}{3} + 2 = 3x - 2 \end{cases}$$

Требования к выполнению входной практической работы

Входная практическая работа выполняется на первой учебной неделе курса во время самостоятельной работы.

Критерии оценивания и оценивание входной практической работы:
входная практическая работа не подвергается оцениванию.

3.1.2. Контрольная работа № 1

Варианты заданий для контрольной работы №1 (с решениями)

1. Дано уравнение: $\frac{(x-2)^2}{2} + \frac{18}{(x-2)^2} = 7 \cdot \left(\frac{x-2}{2} - \frac{3}{x-2} \right) + 10$

а) Решите уравнение

б) Найдите его корни, принадлежащие отрезку $[-2;2]$

Решение.

а) Сделаем замену

$$t = \frac{x-2}{2} - \frac{3}{x-2},$$

Тогда

$$t^2 = \frac{(x-2)^2}{4} + \frac{9}{(x-2)^2} - 3.$$

Имеем:

$$2(t^2 + 3) = 7t + 10 \Leftrightarrow 2t^2 - 7t - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -\frac{1}{2}, \\ t = 4. \end{cases}$$

Вернемся к исходной переменной.

Если $t = -\frac{1}{2}$, то

$$\frac{x-2}{2} - \frac{3}{x-2} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 2, \\ (x-2)^2 - 6 = -(x-2) \end{cases} \Leftrightarrow x^2 - 3x - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1, \\ x = 4. \end{cases}$$

Если $t = 4$, то

$$\frac{x-2}{2} - \frac{3}{x-2} = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 2, \\ (x-2)^2 - 6 = 8(x-2) \end{cases} \Leftrightarrow x^2 - 12x + 14 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 - \sqrt{22}, \\ x = 6 + \sqrt{22}. \end{cases}$$

б) Выясним, какие из найденных корней принадлежат отрезку $[-2;2]$. В силу неравенств

$$0 < 6 - \sqrt{22} < 6 - 4 = 2 \quad 6 + \sqrt{22} > 6 + 4 = 10 > 2,$$

из найденных корней уравнения заданному отрезку принадлежат только числа: -1 и $6 - \sqrt{22}$.

Ответ: а) $\{-1; 4; 6 - \sqrt{22}; 6 + \sqrt{22}\}$ б) $-1; 6 - \sqrt{22}$.

2. Решите неравенство:

$$\frac{x^4 - 2x^3 + x^2}{x^2 + x - 2} - \frac{2x^3 + x^2 + x - 1}{x + 2} \leq 1.$$

Решение.

Преобразуем неравенство:

$$\frac{x^4 - 2x^3 + x^2}{x^2 + x - 2} - \frac{2x^3 + x^2 + x - 1}{x + 2} \leq 1;$$

$$\frac{x^2(x-1)^2}{(x+2)(x-1)} - \frac{2x^3 + x^2 + 2x + 1}{x + 2} \leq 0;$$

$$\begin{cases} \frac{-x^3 - 2x^2 - 2x - 1}{x + 2} \leq 0, \\ x \neq 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{(x+1)(x^2+x+1)}{x+2} \geq 0, \\ x \neq 1; \end{cases};$$

$$x \in (-\infty; -2), [-1; 1), (1; +\infty).$$

$$\text{Ответ: } (-\infty; -2) \cup [-1; 1) \cup (1; +\infty).$$

Требования к выполнению контрольной работы №1

Контрольная работа №1 выполняется слушателем на листах формата А4. Обязательным является наличие титульного листа. Контрольная работа включает 5 заданий, соответствующих заданиям рассмотренных тем. Решение заданий контрольной работы должно быть развернутым, т.е. полным и обоснованным. При необходимости слушатель может сопровождать аналитическое решение графическими комментариями.

Критерии оценивания контрольной работы №1: для оценки заданий контрольной работы №1 применяются критерии, аналогичные критериям школьных оценок. Каждый номер контрольной работы № 1 оценивается 0, 1, 2, 3, 4 или 5 баллами. Таким образом, максимальная оценка за контрольную работу №1 составляет 25 баллов.

Оценивание контрольной работы №1: количество баллов, полученное за контрольную работу № 1.

3.1.3. Контрольная работа №2

Варианты заданий для контрольной работы № 2 (без решений)

1. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение

$$\left| \frac{5}{x+1} - 3 \right| = ax + a - 2$$

на промежутке $(-1; +\infty)$ имеет больше двух корней.

2. Решите уравнение

$$\sqrt{x^3 - 4x^2 - 10x + 29} = 3 - x$$

и укажите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $[-\sqrt{3}; \sqrt{30}]$.

Требования к выполнению контрольной работы №2

Контрольная работа №1 выполняется слушателем на листах формата А4. Обязательным является наличие титульного листа. Контрольная работа включает 5 заданий, соответствующих заданиям рассмотренных тем. Решение заданий контрольной работы должно быть развернутым, т.е. полным и обоснованным. При необходимости слушатель может сопровождать аналитическое решение графическими комментариями.

Критерии оценивания контрольной работы №2: для оценки заданий контрольной работы №1 применяются критерии, аналогичные критериям школьных оценок. Каждый номер контрольной работы № 1 оценивается 0, 1, 2, 3, 4 или 5 баллами. Таким образом, максимальная оценка за контрольную работу №1 составляет 25 баллов.

Оценивание контрольной работы №2: количество баллов, полученное за контрольную работу № 1.

3.1.4 Проект «Диагностическая работа»

Варианты заданий к проекту с решениями

1. Дано уравнение: $\sqrt{x^3 - 4x^2 - 10x + 29} = 3 - x$

а) Решите уравнение

б) Укажите все корни уравнения, принадлежащие промежутку $[-\sqrt{3}; \sqrt{30}]$.

Решение.

а) Решим уравнение:

$$\sqrt{x^3 - 4x^2 - 10x + 29} = 3 - x \Leftrightarrow \begin{cases} 3 - x \geq 0, \\ x^3 - 4x^2 - 10x + 29 = (3 - x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 3, \\ x^3 - 5x^2 - 4x + 20 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 3, \\ x^2(x - 5) - 4(x - 5) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 3, \\ (x - 5)(x^2 - 4) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 3, \\ \begin{cases} x = 5, \\ x = -2, \\ x = 2 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2, \\ x = 2 \end{cases}$$

б) Поскольку

$$-2 < -\sqrt{3} < 2 < \sqrt{30},$$

отрезку $[-\sqrt{3}; \sqrt{30}]$ принадлежит только число 2.

Ответ: а) $\{-2; 2\}$; б) 2.

2. Решите неравенство:

$$25x^2 - 4|8 - 5x| < 80x - 64.$$

Решение.

Решим неравенство:

$$25x^2 - 80x + 64 - 4|8 - 5x| < 0 \Leftrightarrow (5x - 8)^2 - 4|8 - 5x| < 0.$$

Сделаем замену $y = |8 - 5x|$. Тогда $y^2 - 4y < 0 \Leftrightarrow 0 < y < 4$.

Вернемся к исходной переменной:

$$0 < |8 - 5x| < 4 \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < 8 - 5x < 4, \\ -4 < 8 - 5x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{4}{5} < x < \frac{8}{5}, \\ \frac{8}{5} < x < \frac{12}{5}. \end{cases}$$

Ответ: $\left(\frac{4}{5}; \frac{8}{5}\right) \cup \left(\frac{8}{5}; \frac{12}{5}\right)$.

3. Найдите все значения параметра а, при каждом из которых система

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2(2y - x)a = 1 + 2a - 4a^2, \\ x^2 + y^2 + 4(x - y)a = 4 + 4a - 7a^2. \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Решение.

Запишем систему в виде

$$\begin{cases} (x-a)^2 + (y+2a)^2 = (1+a)^2, \\ (x+2a)^2 + (y-2a)^2 = (2+a)^2. \end{cases}$$

При $a = -1$ имеем систему

$$\begin{cases} (x+1)^2 + (y-2)^2 = 0, \\ (x-2)^2 + (y+2)^2 = 1. \end{cases}$$

Эта система решений не имеет. Следовательно, $a = -1$ не удовлетворяет условию задачи.

При $a = -2$ имеем систему

$$\begin{cases} (x+2)^2 + (y-4)^2 = 1, \\ (x-4)^2 + (y+4)^2 = 0. \end{cases}$$

Эта система тоже решений не имеет. Следовательно, и $a = -2$ не удовлетворяет условию задачи.

Если $a \neq -1$, $a \neq -2$,

то каждое уравнение системы есть уравнение окружности. В этом случае система имеет единственное решение тогда и только тогда, когда расстояние между центрами этих окружностей равно сумме или разности их радиусов.

Пусть $a \neq -1$, $a \neq -2$.

Расстояние O_1O_2 между центрами $O_1(a, -2a)$ и $O_2(-2a, 2a)$ равно $O_1O_2 = \sqrt{9a^2 + 16a^2} = 5|a|$, а радиусы $R_1 = |a+1|$ и $R_2 = |a+2|$.

Решим два уравнения: (1) $O_1O_2 = R_1 + R_2$ и (2) $O_1O_2 = |R_1 - R_2|$.

Уравнение (1) имеет вид $5|a| = |a+1| + |a+2|$; уравнение (2) имеет вид $5|a| = ||a+1| - |a+2||$. Решением уравнения (1) являются числа 1 и $-\frac{3}{7}$. Решением уравнения (2) являются числа $-\frac{1}{5}; \frac{1}{5}$.

Ответ: $-\frac{3}{7}; -\frac{1}{5}; \frac{1}{5}; 1$

Требования к выполнению проекта

Проект «Диагностическая работа» выполняется слушателем на листах формата А4. Обязательно наличие титульного листа.

Выполнение проекта предусматривает составление двух вариантов диагностической работы, соответствующих двум уровням сложности. Каждый вариант должен содержать по два задания по каждой из тем разделов 1-4.

Критерии оценивания

+	Оба варианта диагностической работы соответствуют критериям уровня сложности заданий	30 баллов
+ / -	Имеются единичные несоответствия критериям уровня сложности заданий в одном варианте	25 баллов
- / +	Имеются единичные несоответствия критериям уровня сложности заданий в двух вариантах	15 баллов
-	Имеются многочисленные несоответствия критериям уровня сложности заданий	10 баллов

Оценивание проекта: количество баллов, полученное за проект.

3.1.5. Выходное тестирование

В ходе завершения курса слушатели выполняют итоговую практическую работу. Итоговая практическая работа содержит пять заданий, охватывающие все разделы курса. Выходное тестирование подвергается оцениванию

Типовые варианты заданий итоговой практической работы

1. Решите неравенство:

$$\frac{2x^2 - 2x}{x^2 - x + 1} < \frac{2x^2 - 2x - 2}{x^2 - x - 2} - 1$$

2. Решите уравнение:

$$\sqrt{2x - 3} + \sqrt{4x + 1} = 4$$

2. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3|x| + 2y = 1, \\ 2|x| - y = 3; \end{cases}$$

Требования к выполнению итоговой практической работы

Итоговая практическая работа выполняется после сдачи проекта. Выполнение каждого задания предполагает развернутое решение с ответом.

Критерии оценивания: для оценки заданий итоговой практической работы применяются критерии, аналогичные критериям школьных оценок. Каждое

задание оценивается 0, 1, 2, 3, 4 или 5 баллами. Таким образом, максимальная оценка за итоговую практическую работу составляет 25 баллов.

Оценивание: количество баллов, полученное за итоговую практическую работу.

3.2 Итоговая аттестация

Итоговая аттестация – зачет как совокупность выполненных контрольных работ №№ 1-2, проекта «Диагностическая работа» и итогового теста. Итоговая аттестация осуществляется на основании полученных совокупных баллов за контрольные работы №№1-2, проект и итоговую практическую работу. Зачет ставится, если по результатам выполнения контрольных работ №№1-2, проекта и итоговой практической работы слушатель набрал не менее 60 баллов.

Оценивание: зачет/незачет

РАЗДЕЛ 4. «ОРГАНИЗАЦИОННО-ПЕДАГОГИЧЕСКИЕ УСЛОВИЯ РЕАЛИЗАЦИИ ПРОГРАММЫ»

4.1. Учебно-методическое обеспечение и информационное обеспечение программы

4.1.1. Основная литература:

1. ЕГЭ. Математика. Базовый уровень. Готовимся к итоговой аттестации / А. В. Семенов, И. В. Яценко, И. Р. Высоцкий, А. С. Трепалин, Е. А. Кукса - Москва: МЦНМО, издательство "Интеллект-Центр"; 2021 г. - 312 с.

2. Решение заданий повышенного и высокого уровня сложности. Как получить максимальный балл на ЕГЭ / А.В. Семенов, И.В. Яценко, И.Р. Высоцкий, А.С. Трепалин, Е.А. Кукса. Математика: учебное пособие. – Москва: МЦНМО, издательство "Интеллект-Центр"; 2019.

3. Математика. Профильный уровень. Практическое руководство / Т. М. Ерина - Москва: издательство "Экзамен"; 2022 г. - 352 с. (Серия "ЕГЭ").

4. Мордкович А.Г. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс. Учебник для общеобразовательных организаций (базовый и углубленный уровни). В 2 ч. Ч. 1 / А.Г. Мордкович, П.В. Семенов. – 6-е изд., перераб. – М. : Мнемозина, 2022. – 583 с.: ил.

4.1.2 Дополнительная литература:

1. Амелькин В.В., Рабцевич В.Л. Задачи с параметрами: Справ. пособие по математике. – Мн.: «Асар», 1996. – 464с.

2. Высоцкий В.С. Задачи с параметром при подготовке к ЕГЭ. М.: Научный мир, 2011. – 316 с: 262 ил.

3. Горнштейн П.И., Полонский В.В., Якир М.С. Задачи с параметрами. Изд. 3-е, перераб., доп. Серия: Кладовая школьной математики, 2005, 328 с.

4. Кравцев С.В. и др. Методы решения задач по алгебре: от простых до самых сложных. – М.: «Экзамен», 2005. – 544с.

5. Сборник задач по математике для поступающих во втузы. Учеб. пособие / В.К. Егерев, В.В. Зайцев, Б.А. Кордемский и др. Под ред. М.И. Сканави. –6–е изд. – М.: Издательский дом «ОНИКС 21 век»: Мир и образование, 2001. – 608с.

6. Козко А.И., Чирский В.Г. Задачи с параметром и другие сложные задачи. – 2-е издание, испр. и доп. – М.: МЦНМО, 2008. – 376 с.

7. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс. Учебник для общеобразовательных организаций (базовый и углубленный уровни). В 2 ч. Ч. 2 / [А.Г. Мордкович и др.] – 5-е изд., перераб. – М.: Мнемозина, 2017. – 264 с.: ил.

8. Никольский С.М., Потапов М.К., Решетников Н.Н., Шевкин А.В. Алгебра и начала математического анализа: учебник для 10, 11 классов. – М.: Просвещение, 2008.

9. Панферов В.С., Сергеев И.Н. Отличник ЕГЭ. Математика. Решение сложных задач; ФИПИ. – М.: Интеллект-Центр, 2010. – 80 с.

10. Сергеев И.Н., Панферов В.С. ЕГЭ 2012. Математика. Задача С3. Уравнения и неравенства. Под ред. А.Л. Семенова и И.В. Яценко. 3 изд., доп. – М.: МЦНМО, 2012. – 72 с.

11. Ушаков В.К. Довузовская математика. Алгебра: учебное пособие. - М.: Издательский дом «Дело» РАНХиГС, 2014.-448 с.

12. Ушаков В.К. Довузовская математика: Ч.1. Арифметические и алгебраические выражения. Рациональные уравнения и неравенства./Учебное пособие. - М.: Экон-Информ, 2007.-236с.

13. Ушаков В.К. Довузовская математика: Ч.2. Уравнения и неравенства с модулями. Иррациональные уравнения и неравенства. Системы уравнений. /Учебное пособие. - М.: Издательство «Дело» АНХ, 2009.-324 с.

14. Шестаков С.А., Захаров П.И. ЕГЭ 2013. Математика. Задача С1. Уравнения и системы уравнений. Под ред. А.Л. Семенова и И.В. Яценко. – М.: МЦНМО, 2013. – 172 с.

4.1.3. Интернет-ресурсы:

1. Научная электронная библиотека eLIBRARY <https://elibrary.ru/> (дата обращения: 23.03.2023)

2. Образовательный портал «Решу ЕГЭ». Режим доступа: <https://math-ege.sdamgia.ru/> (дата обращения: 23.03.2023).

4.2. Материально-технические условия реализации программы:

Для проведения очных занятий и итоговой аттестации используются учебные аудитории с меловой или маркерной доской, а также компьютерный класс с возможностью выхода в Интернет.

4.3 Кадровые условия реализации программы

Для реализации программы приглашается профессорско-преподавательский состав университета.

Реализует программу Ушаков Владимир Кимович, профессор, доктор технических наук, профессор кафедры математики НИТУ МИСИС.