

Лабораторная работа № 1-07

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ МОЛЕКУЛ ГАЗА ПО СКОРОСТЯМ

(РАСПРЕДЕЛЕНИЕ МАКСВЕЛЛА)

1. Цель работы.

Изучение основ молекулярно-кинетической теории газов. Экспериментальная проверка закона максвелловского распределения молекул идеального газа по скоростям.

2. Теоретическое введение.

2.1. Функция распределения молекул идеального газа по скоростям.

Молекулы газа, даже в равновесии, движутся беспорядочно, сталкиваясь между собой и со стенками сосуда, непрерывно меняя свою скорость как по величине, так и по направлению. Согласно молекулярно-кинетической теории, давление и температура газа остаются постоянными, если среднее значение квадрата скорости молекул не меняется. Это оказывается возможным лишь при наличии неизменного во времени и одинакового во всех частях сосуда (равновесного) распределения молекул газа по скоростям, впервые выведенного Дж. Максвеллом в 1859 году для модели идеального газа.

В рассматриваемой модели газ представляет собой совокупность большого числа одинаковых, абсолютно упругих шариков-молекул, находящихся в сосуде с заданной температурой стенок. Пусть N - число молекул, находящихся в состоянии беспорядочного теплового движения при определенной температуре газа T . Нельзя точно указать скорость какой-либо группы молекул, но можно говорить о среднем числе молекул, скорости которых находятся в некотором малом интервале скоростей $d\vec{v}$ между значениями \vec{v} и $\vec{v} + d\vec{v}$. Число (доля) этих молекул есть:

$$dN_v = Nf(\vec{v}) d\vec{v} , \quad (1)$$

где $f(\vec{v})$ – функция распределения молекул газа по скоростям.

Следует напомнить, что скорость \vec{v} является вектором, поэтому функция распределения $f(\vec{v})$, имеющая смысл функции вероятности, характеризует распределение молекул газа как по абсолютным значениям (модулям) скоростей, так и по их направлениям. В декартовой системе координат пространства скоростей интервалу скоростей $d\vec{v}$ соответствует представление в виде $d\vec{v} = dv_x dv_y dv_z$, в сферической системе координат

$$d\vec{v} = v^2 \sin \theta \cdot dv d\theta d\varphi = v^2 dv d\Omega, \quad (2)$$

где $d\Omega = \sin \theta \cdot d\theta d\varphi$ - элемент телесного угла в пространстве скоростей.

В одномерном варианте вероятность того, что x -составляющая скорости молекулы попадет в интервал от v_x до $v_x + dv_x$ должна быть пропорциональна ширине рассматриваемого интервала скоростей dv_x с коэффициентом пропорциональности, зависящим от величины v_x . Обозначим эту вероятность как $f(v_x)dv_x$. Величина $f(v_x)$ является одномерной функцией распределения и характеризует плотность вероятности попадания величины v_x в заданный интервал скоростей dv_x , т.е. характеризует распределение молекул не по полной скорости \vec{v} , а только по ее проекции v_x на ось x . Величина же $f(\vec{v})$ имеет смысл объемной или трехмерной функции распределения в пространстве скоростей. Вероятность того, что молекула попадет в элемент объема пространства скоростей $d\vec{v} = dv_x dv_y dv_z$, т.е. одновременно окажется внутри трех интервалов $(v_x, v_x + dv_x)$, $(v_y, v_y + dv_y)$ и $(v_z, v_z + dv_z)$, должна выражаться произведением трех вероятностей, а именно:

$$dWv = f(v_x)f(v_y)f(v_z)dv_x dv_y dv_z = f(\vec{v})d\vec{v}. \quad (3)$$

Вероятность того, что скорость молекулы может принять хотя бы какое-нибудь значение из всех возможных, есть событие достоверное, поэтому его вероятность равна единице:

$$W_v = \iiint_{\vec{v}} f(\vec{v}) d\vec{v} = 1, \quad (4)$$

где интегрирование производится по всему трехмерному пространству скоростей.

Это условие называют *условием нормировки* для функции распределения $f(\vec{v})$.

С другой стороны, вероятность dW_v равна относительному числу молекул, скорости которых лежат в указанном интервале скоростей:

$$dW_v = \frac{dN_v}{N}, \quad (5)$$

где dN_v - число молекул, скорости которых лежат в интервале скоростей $(\vec{v}, \vec{v} + d\vec{v})$.

Для молекул, находящихся в состоянии теплового равновесия, вероятность обнаружить молекулу со скоростью движения, *абсолютное значение* которой находится в пределах заданного малого интервала от v до $v + dv$, определяется распределением Больцмана по кинетическим энергиям молекул. Функция этого распределения имеет вид:

$$f(v) = A \cdot e^{-\frac{mv^2}{2kT}}, \quad (6)$$

где m - масса одной молекулы; $k = 1.38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К – постоянная Больцмана; A – нормировочный множитель.

Тогда, согласно (3) и (5), доля молекул $\frac{dN_v}{N}$, *абсолютные значения* скоростей которых лежат в пределах от v до $v + dv$, определится, с учетом (2), интегрированием функции (6) по полному телесному углу в пространстве скоростей, т.е. выражением:

$$\frac{dN_v}{N} = f(v)v^2 dv \cdot \int_0^{4\pi} d\Omega = 4\pi \cdot Av^2 e^{-\frac{mv^2}{2kT}} dv. \quad (7)$$

Множитель A определяется из условия нормировки (4), примененному к выражению (7) в интервале изменения скоростей от 0 до некоторого максимального значения, которое (ввиду быстрой сходимости интеграла) можно принять равным ∞ :

$$4\pi \cdot A \int_0^{\infty} v^2 e^{-\frac{mv^2}{2kT}} dv = 1, \quad (8)$$

откуда $A = \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}}$. Подставляя найденное значение A в (7), приходим к закону

распределения молекул идеального газа по скоростям $\frac{dN_v}{N} = F(v)dv$ с функцией

распределения

$$F(v) = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} v^2 e^{-\frac{m_0 v^2}{2kT}} \quad (9)$$

(*распределение Максвелла*). Вид этой функции показан на рис.1 сплошной линией.

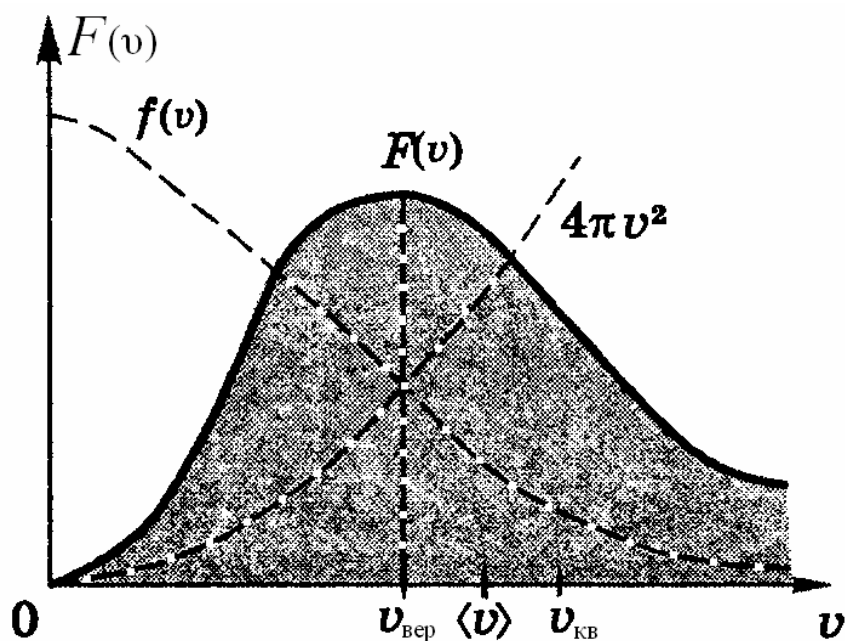


Рис.1. Распределение Максвелла.

Поскольку при возрастании v множитель вида e^{-av^2} убывает быстрее, чем растет множитель v^2 (штриховые линии на рис.1), функция $F(v)$, начинаясь в нуле, достигает максимума, а затем асимптотически стремится к нулю при $v \rightarrow \infty$. Площадь, охватываемая этой кривой, по смыслу определенного интеграла (8), равна единице. Максвелловское распределение есть статистический закон, верный с тем большей точностью, чем большее число молекул находится в газе.

2.2. Наиболее вероятная, средняя арифметическая и средняя квадратичная скорости молекул.

Наиболее вероятная скорость молекул определяется тем значением скорости, для которого функция распределения (9) имеет максимум, т.е. условием $dF/dv=0$. Взяв производную, приходим к уравнению:

$$ve^{-\frac{mv^2}{2kT}} \left(2 - \frac{mv^2}{kT} \right) = 0, \quad (10)$$

откуда (при $v \neq 0$) находим *наиболее вероятную* скорость молекул:

$$v_{\text{вер}} = \sqrt{\frac{2kT}{m}}. \quad (11)$$

Закон распределения (9) позволяет найти также *среднюю арифметическую* и *среднюю квадратичную* скорости молекул.

Средняя арифметическая скорость по определению равна:

$$\langle v \rangle = \int_0^{\infty} vF(v)dv = \int_0^{\infty} v \cdot 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} v^2 e^{-\frac{mv^2}{2kT}} dv. \quad (12)$$

Переходя в (12) к новой переменной $\xi = v^2$ и интегрируя по частям, приходим к следующему результату:

$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8 kT}{\pi m}} . \quad (13)$$

Средняя квадратичная скорость определяется из условия:

$$\langle v^2 \rangle = \int_0^{\infty} v^2 F(v) dv = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} \int_0^{\infty} v^4 e^{-\frac{mv^2}{2kT}} dv . \quad (14)$$

Учитывая, что $\int_0^{\infty} \exp(-\beta x^2) x^4 dx = \frac{3}{8} \sqrt{\pi / \beta^5}$ и подставляя это значение в (14),

находим, при $\beta = \frac{m}{2kT}$, значение $\langle v^2 \rangle = \frac{3kT}{m}$, откуда:

$$v_{кв} = \sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{\frac{3kT}{m}} . \quad (15)$$

Характерные скорости $v_{вер}$, $\langle v \rangle$ и $v_{кв}$ обозначены на рис.1.

2.3. Основное уравнение молекулярно-кинетической теории газов.

Согласно молекулярно-кинетической теории давление идеального газа P связано со средним значением кинетической энергии поступательного движения молекул $\langle \varepsilon_{кин} \rangle$ соотношением:

$$P = \frac{2}{3} n \langle \varepsilon_{кин} \rangle , \quad (16)$$

где $n = N/V$ - концентрация молекул газа, находящихся в объеме V .

Учитывая, что $\langle \varepsilon_{кин} \rangle = \langle mv^2/2 \rangle = (m/2) \langle v^2 \rangle = (m/2) v_{кв}^2$, находим, после подстановки сюда значения средней квадратичной скорости молекул (15):

$$\langle \varepsilon_{кин} \rangle = \frac{3}{2} kT . \quad (17)$$

Формула (17) вскрывает физический смысл температуры T : абсолютная температура газа T - есть мера интенсивности теплового движения его молекул.

С учетом (17) **основное уравнение молекулярно-кинетической теории газов** (16)

можно представить в виде:

$$P = \frac{2}{3} n \langle \epsilon_{\text{кин}} \rangle = nkT . \quad (18)$$

Легко видеть, что из уравнения (18) непосредственно следует *уравнение состояния идеального газа (уравнение Менделеева-Клапейрона)*:

$$P = \frac{N}{V} kT = \frac{\nu N_0}{V} kT = \nu \frac{RT}{V}$$

или

$$PV = \frac{M}{\mu} RT , \quad (19)$$

где $\nu = \frac{M}{\mu}$ - число молей газа, M – масса газа, μ – его молекулярный вес; $R = kN_0 = 8,31$

Дж/(К·моль) – универсальная газовая постоянная, $N_0 = 6,02 \cdot 10^{23}$ моль⁻¹ – число Авогадро.

3. Описание экспериментальной установки.

Общий вид установки для изучения максвелловского распределения скоростей теплового движения молекул изображен на рис.2.

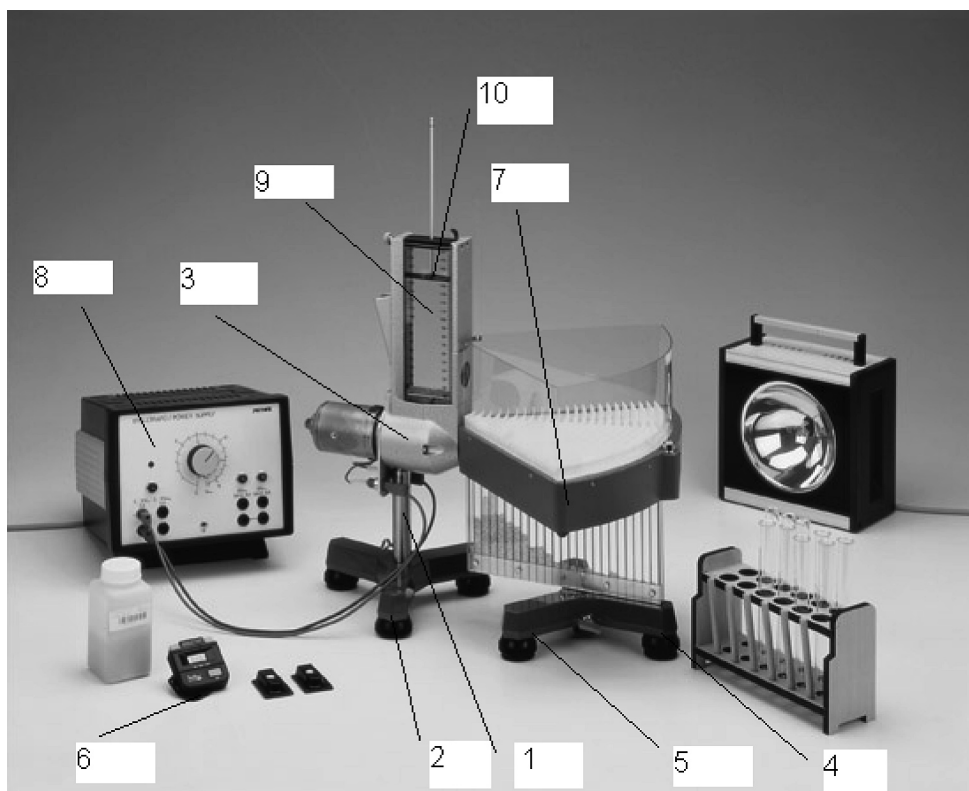


Рис.2. Общий вид установки.

На треножнике *1*, оснащенном регулируемыми винтами *2*, закреплено устройство *3* механической модели максвелловского распределения скоростей, моделирующее тепловое движение молекул, посредством механического движения стеклянных шариков. На треножнике *4*, оснащенном также регулируемыми винтами *5*, закреплен приемник шариков с регистрирующим устройством *7*. Хаотическое движение «частиц» создается источником питания *8*. При проведении опыта стеклянные шарики засыпаются в камеру *9* с поршнем *10* устройства *3*. Время проведения опыта измеряется миллисекундомером *6*.

Таблица 1. Технические данные приборов.

№№ п/п	Название прибора	Пределы измерений	Число делений	Цена деления	Абсолютная приборная погрешность
1	Миллисекундомер	-	-	-	$(\Delta T)_{\text{приб.}} = 0,01\text{с}$
2	Уровнемер (линейка)				$(\Delta h)_{\text{приб}} =$

4. Порядок выполнения работы.

Лабораторную работу следует проводить, строго соблюдая правила техники безопасности и охраны труда, находящиеся на рабочем месте студента в лаборатории.

Перед началом работы необходимо с помощью регулирующих винтов 2 и 5 установить горизонтальное положение и центровку прибора 3 и приемника шариков 7, обращая внимание на то, чтобы пузырьковый указатель уровня находился в центре, а регистрирующее устройство 7 плотно прилегало к прибору 3.

Чтобы поддерживать постоянную плотность «частиц» во время опыта, предварительно выполните следующие действия:

- Определите средний вес одного стеклянного шарика путем взвешивания известного количества (100) шариков с тем, чтобы в дальнейшем не тратить время на определение количества шариков, выталкиваемых из прибора 3.
- Поместите в кювету 400 шариков и засыпьте их в камеру 9.
- Установите высоту поршня 10 на уровне 6 см.
- Установите с помощью источника питания и стробоскопа частоту колебаний 50 Гц.
- Откройте выпускное отверстие на 1 минуту и определите путем взвешивания количество выброшенных шаров. Опыт повторите 4 раза, засыпая шарики, выброшенные после каждого опыта, в 4 отдельные кюветы. Результаты опытов внесите в таблицу 2.

Таблица 2. Предварительные измерения.

№ опыта	Масса 100 шариков, г	Масса 1 шарика, г	Масса выброшенных шариков, г	Количество выброшенных шариков
1				

2				
3				
4				

Проведите эксперимент по определению распределения скоростей «частиц». Для этого:

- 4.1. Установите высоту верхнего поршня на уровне 6 см.
- 4.2. Установите разницу по высоте между выпускным отверстием и приемником 8 см.
- 4.3. Засыпьте в камеру 400 шариков.
- 4.4. Установите частоту колебаний 50 Гц.
- 4.5. После того, как частота стабилизировалась, откройте выпускное отверстие на 5 минут. Каждую минуту пополняйте аппарат шариками из ранее заполненных кювет, чтобы поддерживать постоянную плотность «частиц». Опыт проделайте 4 раза.
- 4.6. Взвесьте массу шариков в каждом из 24-х ячеек приемника, рассчитайте количество шариков и заполните таблицу 3.
- 4.7. Определите скорость шариков для каждой ячейки приемника.

Таблица 2. Результаты измерений.

№ ячейки	Масса шариков в каждом опыте				Общая масса	Общее количество шариков	Расстояние от выпускного отверстия	Скорость шариков
	$m_1, \text{г}$	$m_2, \text{г}$	$m_3, \text{г}$	$m_4, \text{г}$				
1								
2								
3								
...								
24								

5. Обработка результатов измерений.

5.1. Постройте график (гистограмму) распределения вероятности попадания шариков от номера ячейки.

5.2. Сравните экспериментальный график с теоретическим, полученным из распределения Максвелла.

5.3. Исходя из принципа суперпозиции движения шарика в вертикальном и горизонтальном направлениях, выведите формулу для расчета скорости шарика в зависимости от расстояния S между выпускным отверстием и соответствующей ячейкой приемника.

Примечание. Скорость шарика можно найти, зная его дальность полета S (если шарик вылетает из отверстия установки горизонтально).

5.4. Экспериментальные результаты (количество шариков с разной дальностью полета) представьте в виде графика функции:

$$f(v) = \frac{1}{\sum N_i} \cdot \frac{N_i}{\Delta v}$$

где N_i - количество шариков в интервале $i = 1, 2, 3, \dots$; Δv - изменение скорости, соответствующее изменению пути $\Delta S = 1 \text{ см}$.

5.5. Выведите формулу для расчета погрешности косвенного измерения скорости шарика и рассчитайте абсолютную погрешность ее определения.

6. Библиографический список.

а) основная:

1. Савельев И.В. Курс общей физики. Т. 3. М.: Наука. 2004. -304 с.
2. Капуткин Д.Е., Шустиков А.Г. Физика. Обработка результатов измерений при выполнении лабораторных работ. (№ 805). М.: МИСиС. «Учеба». 2007.-108с.

б) дополнительная:

3. А.А. Детлаф и др. Курс физики. Т.1. М.: Высшая школа. 1973. -384с.
4. Ф.Рейф. Статистическая физика. М.: Наука. 1977. -352с.

7. Контрольные вопросы.

1. Какие ограничения были приняты Максвеллом при выводе распределения молекул газа по скоростям?
2. Как из графика функции максвелловского распределения определить наиболее вероятную скорость молекул?
3. Как зависит средняя кинетическая энергия идеального газа от температуры?
4. Что определяет и какой смысл имеет «условие нормировки функции распределения»?
5. Как изменится кинетическая энергия молекул идеального газа при изотермическом сжатии?
6. Задача. Найти число молекул водорода в единице объема при давлении $P=300 \text{ Па}$, если средняя квадратичная скорость молекул равна 2 км/с .

8. Индивидуальные задания.

Задание 1.

1. Вывести основное уравнение молекулярно-кинетической теории газов.
2. Используя максвелловский закон распределения молекул по скоростям, получить выражение для наиболее вероятной скорости.
3. Построить график (гистограмму), откладывая по оси абсцисс расстояние от выпускного отверстия до ячеек приемника, а по оси ординат долю шариков, от общего числа, попавших в соответствующую ячейку. Сравнить полученный график с графиком функции распределения Максвелла.

Задание 2.

1. Вывести выражение для средней квадратичной скорости молекул.
2. Используя максвелловский закон распределения молекул по скоростям, найти закон распределения молекул по кинетическим энергиям.
3. Найти зависимость скорости шарика v как функцию расстояния S от выпускного отверстия до ячейки приемника. Рассчитать скорости шариков и построить график зависимости $v = f(S)$

Задание 3.

1. Вывести выражение для средней кинетической энергии поступательного движения молекул идеального газа.
2. Используя закон максвелловского распределения молекул по скоростям в виде

$$F(u) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} e^{-u^2} u^2 du, \text{ где } u = \frac{v}{v_{\text{вер}}}, \text{ получить выражение (13).}$$

3. Построить график (гистограмму) распределения вероятности попадания шариков в приемник от номера ячейки приемника.

Задание 4.

1. Используя закон максвелловского распределения молекул по скоростям в виде

$$F(u) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} e^{-u^2} u^2 du, \text{ где } u = \frac{v}{v_{вер}}, \text{ получить выражение для определения доли}$$

молекул $\frac{dN_\epsilon}{N}$, имеющих кинетическую энергию в интервале от $\epsilon_{кин}$ до $\epsilon_{кин} + d\epsilon_{кин}$.

2. Используя функцию распределения молекул по скоростям, оценить число молекул в 1 м^3 при нормальных условиях, если их доля составляет 10^{-3} от наиболее вероятной.
3. Оценить наиболее вероятную скорость молекул воздуха при нормальных условиях и наиболее вероятную скорость шариков из эксперимента. Сравнить график распределения скорости шариков с графиком максвелловского распределения молекул по скоростям.