

**ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ РФ
МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ГОРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
КАФЕДРА ФИЗИКИ**

**МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
И КОНТРОЛЬНЫЕ РАБОТЫ ПО ФИЗИКЕ**

для студентов заочной формы обучения

**Раздел «Основы квантовой теории.
Термодинамика и статистическая физика»**

Москва 2009

**ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ РФ
МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ГОРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
КАФЕДРА ФИЗИКИ**

Утверждено Советом МГГУ МРиКО
в качестве учебного пособия
для студентов всех специальностей МГГУ

**МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
И КОНТРОЛЬНЫЕ РАБОТЫ ПО ФИЗИКЕ
для студентов заочной формы обучения**

**Раздел «Основы квантовой теории.
Термодинамика и статистическая физика»**

Москва 2009

Авторский коллектив: Блохин Д. И., Карпов О. Б., Минаев В. И., Муратов Р. З., Саваторова В. Л., Соболев А. В., Харахан М. Л., Ховайло В. В., Шапошников Ф. В.

Под общей редакцией: Муратова Р. З., Харахана М. Л.

Методическое пособие предназначено для самостоятельной работы и контроля знаний по разделам “Основы квантовой теории. Термодинамика и статистическая физика” учебной дисциплины ”Физика” для студентов заочной формы обучения МГГУ. В пособие включена рабочая программа дисциплины по данным разделам, набор задач и таблицы вариантов контрольных работ, а также основные понятия, формулы и примеры решения задач, необходимые для выполнения контрольных работ. Пособие может быть использовано также для контроля знаний по соответствующим разделам общей физики студентов очной и очно – заочной форм обучения.

ЧАСТЬ V

5.1. ТЕПЛОВОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ

Теоретический минимум

Нагретые тела испускают электромагнитное излучение в широком диапазоне длин волн. Такое излучение называется *тепловым*. Электромагнитные волны являются формой существования электромагнитного поля, которое является полем физическим, т.е. оно обладает энергией, импульсом, моментом импульса и рядом других характеристик, свойственных частицам. Все тела способны поглощать и излучать энергию при любой температуре (отличной от абсолютного нуля). С изменением температуры меняется интенсивность излучения и его спектральный состав.

М. Планк обнаружил, что испускание и поглощение излучения происходит не непрерывно, а порциями – квантами, а, точнее, нагретые тела испускают и поглощают фотоны – незаряженные частицы электромагнитной природы, с нулевой массой покоя, энергия и импульс которых равны, соответственно, $h\nu$ и $h\nu/c$, где $h=6,626 \cdot 10^{-34}$ Дж·с - постоянная Планка, c - скорость света в вакууме, а ν - частота излучения.

Тело, поглощающее падающее на него излучение целиком, называется абсолютно чёрным. Тепловое излучение называется равновесным и его состояние характеризуется температурой T [К], равной температуре чёрного тела, если любой элемент поверхности такого тела излучает энергии столько же, сколько и поглощает: любая полость внутри твёрдого тела заполнена таким равновесным тепловым излучением (см. Рис.5.1.1). Характеристики такого излучения зависят от температуры T и от спектрального состава (т.е. от частоты ν или от длины волны λ).

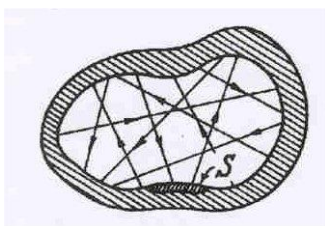


Рис. 5.1.1.

Важнейшими характеристиками тела, излучающего свет, являются интегральная энергетическая светимость R и спектральная светимость $r(\lambda)$:

Интегральная энергетическая светимость:

$$R = \frac{P}{S}, \left[\frac{Вт}{м^2} \right] \quad (5.1.1)$$

где P – мощность излучения, S – площадь излучателя.

Спектральная светимость r в интервале длин волн от λ до $\lambda + \Delta\lambda$ определяется как $r = \frac{\Delta R}{\Delta\lambda}, \left[\frac{Вт}{м^3} \right]$. Из опыта известно, что R и r зависят от температуры излучателя.

Для абсолютно черного тела справедлив закон Стефана – Больцмана:

$$R = \sigma T^4, \quad (5.1.2)$$

где T – температура [K], а $\sigma = 5,671 \cdot 10^{-8} \left[\frac{Вт}{м^2 \cdot K^4} \right]$ – постоянная Стефана –

Больцмана.

Планк, используя идею о квантовом характере испускания электромагнитного излучения нагретым телом, сумел вывести формулу для спектральной светимости. Абсолютно черное тело испускает и поглощает свет не непрерывно, а порциями энергии – квантами. Энергия каждого такого кванта $\varepsilon = h\nu$, где ν – частота света, $h = 6,626 \cdot 10^{-34} [Дж \cdot с]$ – постоянная Планка. Используя гипотезу Планк получил формулу для спектральной светимости:

$$r(\nu) = \frac{2\pi\nu^2}{c^2} \cdot \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}, \quad (5.1.3)$$

где $k = 1,38 \cdot 10^{-23} [Дж/К]$ – постоянная Больцмана.

Спектральная светимость $r(\lambda)$ имеет вид колоколообразной кривой (см. Рис.5.1.2.); площадь под кривой спектральной светимости, а, следовательно, и интегральная энергетическая светимость R растут пропорционально температуре; максимум этой кривой, согласно закону Вина, смещается с ростом температуры T в область меньших длин волн обратно пропорционально температуре T :

$$\lambda_{\max} = \frac{b}{T}, \quad (5.1.4)$$

где $b = 2,898 \cdot 10^{-3} \text{ [м} \cdot \text{К]}$ – постоянная Вина.

Максимум функции $r(\nu)$ находится из условия $\frac{dr}{d\nu} = 0$, при $\lambda = \lambda_{\max}$. Для определения λ_{\max} используют закон смещения Вина (5.1.4).

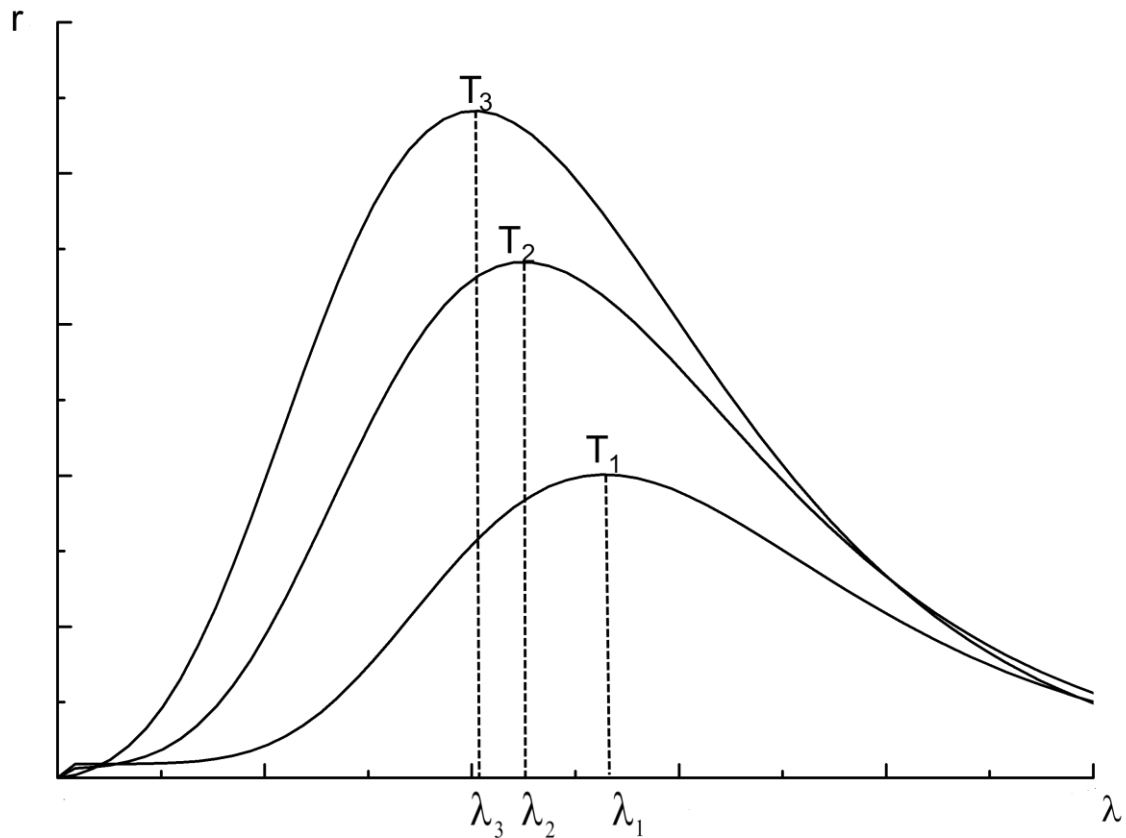


Рис. 5.1.2. Зависимость спектральной светимости r от длины волны λ для различных температур ($T_1 < T_2 < T_3$).

Примеры решения задач

Задача 1.

Во сколько раз увеличится мощность излучения черного тела, если максимум энергии излучения сместится от красной границы видимого спектра $\lambda_k=0,76$ мкм к его фиолетовой границе $\lambda_\phi=0,38$ мкм?

Решение:

Длина волны λ_{\max} , на которую приходится максимум энергии излучения черного тела, согласно закону смещения Вина (5.1.4) равна:

$$\lambda_{\max} = \frac{b}{T}.$$

Используя формулу (5.1.4) определяем температуру, при которой максимум энергии приходится на красную λ_k и фиолетовую λ_ϕ границы видимого спектра:

$$T_k = \frac{b}{\lambda_k}, \quad T_\phi = \frac{b}{\lambda_\phi}. \quad (5.1.5)$$

Мощность излучения определим используя формулу (5.1.1):

$$P = R \cdot S. \quad (5.1.6)$$

В соответствии с законом Стефана-Больцмана (5.1.2):

$$R = \sigma T^4.$$

Для температур T_k и T_ϕ имеем:

$$P_k = \sigma T_k^4 S, \quad P_\phi = \sigma T_\phi^4 S. \quad (5.1.7)$$

Из формул (5.1.7) находим:

$$\frac{P_\phi}{P_k} = \left(\frac{T_\phi}{T_k} \right)^4. \quad (5.1.8)$$

Или с учетом (5.1.5) имеем:

$$\frac{P_\phi}{P_k} = \left(\frac{\lambda_k}{\lambda_\phi} \right)^4. \quad (5.1.9)$$

Подставляя в формулу (5.1.9) числовые значения, получим:

$$\frac{P_{\phi}}{P_{\kappa}} = \left(\frac{0,76}{0,38} \right)^4 = 16.$$

Ответ: $\frac{P_{\phi}}{P_{\kappa}} = 16.$

Задачи

- 5.1.01 Определить температуру T , при которой энергетическая светимость R черного тела равна 10 кВт/м^2 .
- 5.1.02 Температура T верхних слоев звезды Сириус равна 10^4 К , Определить поток энергии Φ , излучаемый с поверхности площадью $S = 1 \text{ км}^2$ этой звезды.
- 5.1.03 Определить относительное увеличение $\Delta R/R$ энергетической светимости черного тела при увеличении его температуры на 1% .
- 5.1.04 Во сколько раз надо увеличить термодинамическую температуру черного тела, чтобы его энергетическая светимость R возросла в два раза?
- 5.1.05 Абсолютно черное тело было нагрето от температуры $100 \text{ }^\circ\text{C}$ до $300 \text{ }^\circ\text{C}$. Найти, во сколько раз изменилась мощность суммарного излучения при этом.
- 5.1.06 Максимум энергии излучения абсолютно черного тела приходится на длину волны $\lambda_0 = 450 \text{ нм}$. Определить температуру T и энергетическую светимость тела R .
- 5.1.07 Температура абсолютно черного тела понизилась с 1000 К до 850 К . Определить, как и на сколько при этом изменилась длина волны, отвечающая максимуму распределения энергии.
- 5.1.08 На какую длину волны λ_m приходится максимум спектральной плотности энергетической светимости черного тела при температуре $t = 0 \text{ }^\circ\text{C}$?
- 5.1.09 Определить температуру T , при которой энергетическая светимость R черного тела равна 10 кВт/м^2 .

5.1.10 Температура верхних слоев Солнца равна 5300 K . Считая Солнце черным телом, определить длину волны λ_{max} , которой соответствует максимальная спектральная плотность энергетической светимости Солнца.

5.2. ФОТОЭФФЕКТ

Теоретический минимум

Внешний фотоэффект – испускание электронов с поверхности металла под действием света. Принципиальная схема установки для наблюдения внешнего фотоэффекта приведена на Рис. 5.2.1 (где К – катод, А – анод, Г – гальванометр, П – потенциометр, В – вольтметр, \mathcal{E} – источник ЭДС, $h\nu$ – квант света, e - электрон).

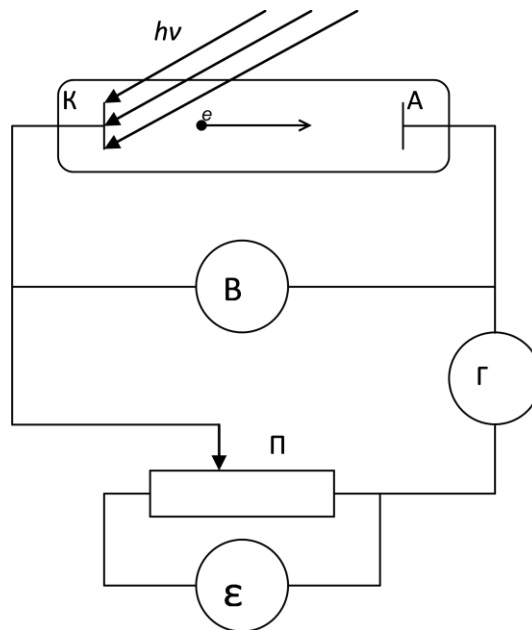


Рис. 5.2.1.

На Рис. 5.2.2 представлена кривая зависимости фототока (электроны движутся от катода к аноду) от напряжения между электродами. Эта кривая называется вольт-амперной характеристикой (ВАХ). Как видно на ВАХ, движение электронов прекращается при некоем напряжении (не равном нулю), которое называют задерживающим напряжением U_3 . То есть внешнее электрическое поле препятствует попаданию электронов на анод. Чтобы определить максимальную скорость V_{\max} , при которой наблюдается этот эффект мы приравняем кинетическую энергию электрона и работу задерживающего напряжения, которое останавливает электрон:

$$\frac{1}{2} m V_{\max}^2 = e U_3. \quad (5.2.1)$$

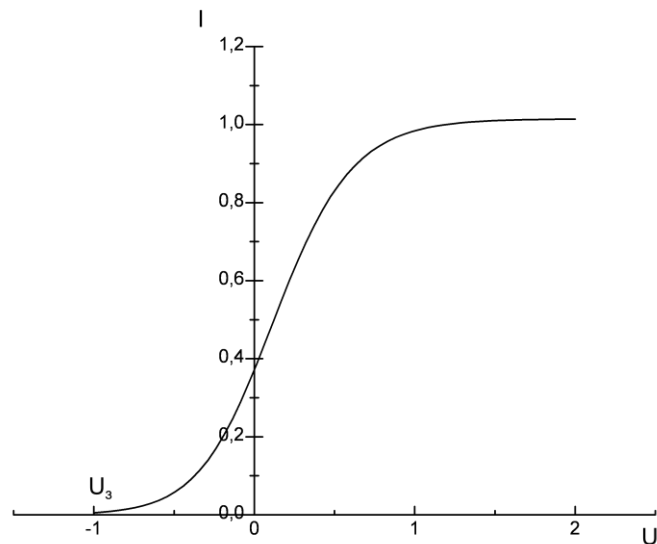


Рис. 5.2.2.

Законы внешнего фотоэффекта.

1. Кинетическая энергия фотоэлектронов зависит от частоты падающего света, а не от его интенсивности (уравнение Эйнштейна):

$$h\nu = A_{\text{вых}} + \frac{mV_{\text{max}}^2}{2}, \quad (5.2.2)$$

где $A_{\text{вых}}$ – работа выхода электрона из металла (энергия необходимая электрону для того, чтобы покинуть металл), $\frac{mV_{\text{max}}^2}{2}$ – максимально возможная кинетическая энергия электрона, ν – частота падающего излучения.

2. Для каждого вещества существует, так называемая, красная граница фотоэффекта – наименьшая частота ν_{min} падающего света, при которой возникает фотоэффект:

$$h\nu_{\text{min}} = A_{\text{вых}}. \quad (5.2.3)$$

Число фотоэлектронов, образующихся за единицу времени (фототок), пропорционально интенсивности падающего света, если $\nu > \nu_{\text{min}}$.

Отметим еще один момент. Одной из внесистемных единиц измерения энергии, которая часто используется в квантовой физике, является электрон-вольт [эВ]. Пересчет из Джоулей в электрон-вольт осуществляется по формуле: $1 \text{ Дж} = 0,625 \cdot 10^{19} \text{ [эВ]}$. Например, постоянная Планка в электрон-вольтах получится равной $h = 4,14 \cdot 10^{-15} \text{ [эВ} \cdot \text{с]}$.

Примеры решения задач

Задача 1.

Красная граница фотоэффекта λ_k для никеля равна $0,257 \text{ мкм}$. Найти длину волны света λ , падающего на никелевый электрод, если фототок прекращается при задерживающей разности потенциалов U_3 , равной $1,5 \text{ В}$.

Решение:

Согласно уравнению Эйнштейна для фотоэффекта (5.2.2):

$$h\nu = A_{\text{вых}} + \frac{mV_{\text{max}}^2}{2}.$$

Красная граница фотоэффекта определяется из условия равенства энергии фотона работе выхода электронов (5.2.3) и, используя соотношение $\nu = \frac{c}{\lambda}$,

получим:

$$\frac{hc}{\lambda_k} = A_{\text{вых}}. \quad (5.2.4)$$

Максимальная кинетическая энергия фотоэлектронов может быть определена через задерживающую разность потенциалов U_3 по формуле (5.2.1):

$$\frac{1}{2} mV_{\text{max}}^2 = eU_3. \quad (5.2.5)$$

где e – элементарный заряд (заряд электрона).

Подставляя выражения (5.2.4) и (5.2.1) в (5.2.2), получим:

$$\frac{hc}{\lambda} = \frac{hc}{\lambda_k} + eU_3. \quad (5.2.6)$$

Из уравнения (5.2.6) выразим длину волны света:

$$\lambda = \left(\frac{1}{\lambda_k} + \frac{eU_3}{hc} \right)^{-1}. \quad (5.2.7)$$

Подставляя в (5.2.7) числовые значения, получим:

$$\lambda = 1,96 \cdot 10^{-7} \text{ м} = 0,196 \text{ мкм}.$$

Ответ: $\lambda = 0,196 \text{ мкм}$.

Задача 2.

Определить максимальную скорость V_{\max} фотоэлектронов, вылетающих из металла под действием γ -излучения с длиной волны $\lambda = 0,3 \text{ нм}$. Работой выхода электронов из металла пренебречь.

Решение:

Согласно уравнению Эйнштейна (5.2.2) запишем:

$$h\nu = A_{\text{вых}} + E_{\text{кин}}, \quad (5.2.8)$$

где кинетическую энергию $E_{\text{кин}}$ можно в случае $V \ll c$ записать в виде:

$$E_{\text{кин}} = \frac{mV^2}{2}; \text{ если скорость электрона релятивистская } (V \approx c), \text{ то:}$$

$$E_{\text{кин}} = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} - 1 \right) \quad (5.2.9)$$

Следовательно, выбор формулы определяется тем, насколько скорость электрона V близка к скорости света c .

Подстановка числовых значений дает оценку энергии покоя электрона:

$$m_e c^2 = 9,108 \cdot 10^{-31} \text{ кг} \cdot (3 \cdot 10^8 \text{ м/с})^2 : 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ эВ/Дж} \approx 0,5 \cdot 10^6 \text{ эВ}.$$

Теперь нужно оценить энергию фотона:

$$\varepsilon_\phi = h\nu = h \frac{c}{\lambda} = \frac{6,62 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{0,3 \cdot 10^{-9}} = 6,6 \cdot 10^{-16} \text{ Дж} : 1,6 \cdot 10^{-19} \frac{\text{эВ}}{\text{Дж}} \approx 4,1 \cdot 10^3 \text{ эВ}.$$

Следовательно:

$$\frac{\varepsilon_\phi}{m_e c^2} = \frac{h\nu}{m_e c^2} = \frac{4,1 \cdot 10^3}{5,1 \cdot 10^5} \approx 10^{-2} \ll 1, \quad \text{а это означает, что электрон}$$

нерелятивистский, а поэтому:

$$E_{кин} = \frac{mV^2}{2}. \quad (5.2.10)$$

Пренебрегая работой выхода $A_{вых}$ (по условию задачи):

$$\frac{m_e V_{max}^2}{2} = h\nu, \quad \text{или} \quad V_{max}^2 = \frac{2h\nu}{m_e} = \frac{2 \cdot 6,62 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{9,108 \cdot 10^{-31}} = 1,4536671 \cdot 10^{15} \text{ м}^2/\text{с}^2$$

извлекая квадратный корень получим: $V_{max} \approx 3,8 \cdot 10^7 \text{ м/с}$, т. е. действительно

$$\frac{V_{max}}{c} \approx \frac{3,8 \cdot 10^7}{3 \cdot 10^8} \approx 0,13 \ll 1.$$

Ответ: $V_{max} \approx 3,8 \cdot 10^7 \text{ м/с}$.

Задачи

- 5.2.01 Определить работу выхода $A_{вых}$ электронов из натрия, если красная граница фотоэффекта $\lambda_K = 500 \text{ нм}$.
- 5.2.02 Будет ли наблюдаться фотоэффект, если на поверхность серебра направить ультрафиолетовое излучение с длиной волны $\lambda = 300 \text{ нм}$? Работа выхода для серебра $4,7 \text{ эВ}$.
- 5.2.03 Какая доля энергии фотона израсходована на работу вырывания фотоэлектрона, если красная граница фотоэффекта $\lambda_K = 307 \text{ нм}$ и максимальная кинетическая энергия E_{max} фотоэлектрона равна 1 эВ ?
- 5.2.04 На поверхность лития падает монохроматический свет ($\lambda = 310 \text{ нм}$) Чтобы прекратить эмиссию электронов, нужно приложить задерживающую разность потенциалов U_3 не менее $1,7 \text{ В}$. Определить работу выхода $A_{вых}$.
- 5.2.05 Для прекращения фотоэффекта, вызванного облучением ультрафиолетовым светом платиновой пластинки, нужно приложить задерживающую разность потенциалов $U_1 = 3,7 \text{ В}$. Если платиновую пластинку заменить другой пластинкой, то задерживающую разность потенциалов придется увеличить до 6 В . Определить работу выхода электронов с поверхности этой

пластинки. Работа выхода для платины $6,3 \text{ эВ}$.

- 5.2.06 На цинковую пластинку падает монохроматический свет с длиной волны $\lambda = 220 \text{ нм}$. Определить максимальную скорость V_{\max} фотоэлектронов. Работа выхода для цинка $4,0 \text{ эВ}$.
- 5.2.07 Определить длину волны λ ультрафиолетового излучения, падающего на поверхность некоторого металла, при максимальной скорости фотоэлектронов, равной 10 Мм/с . Работой выхода электронов из металла пренебречь.
- 5.2.08 Известно, что в боровской модели атома водорода электрон, находящийся в основном состоянии, имеет энергию $E = -13,6 \text{ эВ}$. При облучении фотонами освобождаются электроны с кинетической энергией $E_e = 1,4 \text{ эВ}$. Рассчитать длину волны λ падающих фотонов используя закон сохранения энергии для атомного фотоэффекта: фотон поглощается электроном, связанным в атоме водорода.
- 5.2.09 Определить максимальную скорость V_{\max} фотоэлектронов, вылетающих из металла при облучении γ – фотонами с энергией $E = 1,53 \text{ МэВ}$.
- 5.2.10 Максимальная скорость V_{\max} фотоэлектронов, вылетающих из металла при облучении его γ – фотонами, равна 291 Мм/с . Определить энергию E γ – фотонов.

5.3. МОДЕЛЬ АТОМА ПО БОРУ

Теоретический минимум

Изучение свойств и структуры атомов началось с наблюдения и изучения свойств оптических спектров испускания: вещество нагревали в электрической дуге и оно ярко светилось. Этот свет направляли в специальный прибор – спектрограф, в котором и наблюдали спектр. Эти спектры оказались линейчатыми и характеристическими: *линейчатый* – это означает, что каждый спектр химически чистого вещества наблюдался как набор цветных линий, а *характеристический* – потому, что каждому сорту атомов соответствует свой индивидуальный спектр.

Анализируя результаты спектральных измерений излучения атома водорода, Бальмер сумел скомбинировать формулу для расчета линий видимого участка спектра:

$$\frac{1}{\lambda} = \tilde{\nu} = R_H \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{m^2} \right), \text{ где } m = 3, 4, 5, \dots \infty \quad (5.3.1)$$

В этой формуле λ и $\tilde{\nu}$ - длина волны и волновое число линии излучения, а R_H – постоянная Ридберга, числовое значение которой $R_H = 1,1 \cdot 10^7 \text{ м}^{-1}$. Совокупность спектральных линий (5.3.1) получила название серии Бальмера.

Дальнейший анализ показал, что формулу Бальмера (5.3.1) можно обобщить:

$$\frac{1}{\lambda} = \tilde{\nu} = R_H \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right), \text{ где } n > m \text{ (} n = 1, 2, 3, \dots \infty \text{)} \quad (5.3.2)$$

При переходе электрона на уровень $n = 1$ испускаются линии серии Лаймана в ультрафиолетовом диапазоне, а при переходе на уровень $n = 3$ излучаются линии серии Пашена в инфракрасной области. Переход на $n = 2$ см. (5.3.1).

Объяснение структуры атомных спектров излучения, спектральных формул был дан Н. Бором, который рассмотрел планетарную модель атома водорода (см. Рис. 5.3.1)

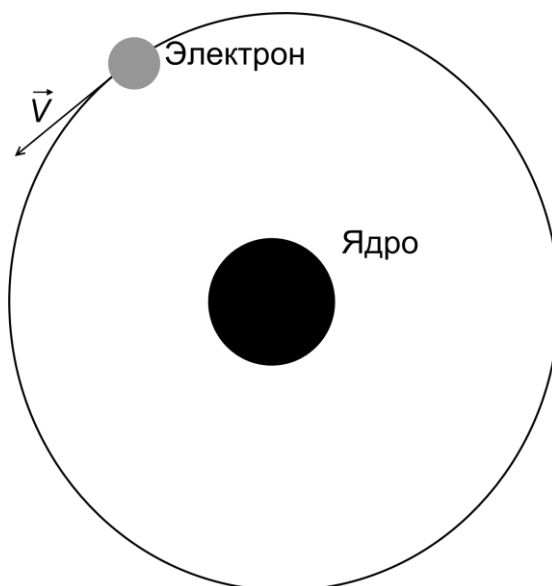


Рис. 5.3.1.

Э. Резерфорд был первым, кто понял и доказал, что в центре любого атома находится массивное и заряженное ядро: $q_{\text{яд}} = +Ze$, где Z – зарядовое число, а e – элементарный заряд, равный заряду электрона. Вокруг ядра движутся электроны, число которых равно Z . Поэтому атом электронейтрален. Характерные атомные размеры: радиус *атома* $R_A = 10^{-10}$ м = 1 Ангстрем = 1 Å, радиус *ядра* $R_{\text{я}} = 10^{-15}$ м = 1 Ферми = 1 Ф. Такая модель атома получила название *планетарной*.

С классической точки зрения, планетарная модель не имеет права на существование: электрон – заряженная частица, которая движется с центростремительным ускорением; такая частица обязана непрерывно излучать электромагнитные волны, т. е. терять энергию, в результате чего электрон за доли секунды должен упасть на ядро, а атом должен уменьшиться в 100000 раз до размеров ядра. *Но этого не происходит! Почему?* Н. Бор попытался ответить на этот вопрос.

Н. Бор предложил планетарную модель простейшего из атомов – атома водорода. Поскольку многое было неизвестно, Н. Бор начал с постулатов.

1-ый постулат Бора: электрон в атоме существует только в *стационарных* состояниях, в которых его энергия не меняется, в этих состояниях атом не излучает и не поглощает свет.

2-ой постулат Бора: свет излучается или поглощается в форме фотона (кванта электромагнитной природы) с энергией $\varepsilon_\phi = h\nu$ при переходе атома из одного стационарного состояния с энергией E_m в стационарное состояние с энергией E_n ; при этом выполняется закон сохранения энергии: $h\nu = E_m - E_n$, где ν – частота фотона, h – постоянная Планка ($h = 6,62 \cdot 10^{-34}$ Дж·с).

3-ий постулат Бора: в стационарном состоянии момент импульса электрона может принимать значения, равные целому числу постоянных Планка:

$$m_e V r_n = n\hbar, \quad (5.3.3)$$

где $n = 1, 2, 3, \dots$, m_e – масса электрона, V – его скорость, r_n – радиус круговой орбиты стационарного состояния, а $\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1,055 \cdot 10^{-34}$ Дж·с.

Используя эти постулаты, легко рассчитать радиусы r_n и энергии E_n стационарных орбит. Значение центростремительного ускорения находится из 2-го закона Ньютона, в котором роль центростремительной силы играет сила Кулона:

$$a = \frac{V^2}{r} = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 m_e r^2}. \quad (5.3.4)$$

Выразим из формулы (5.3.4) квадрат скорости электрона:

$$V^2 = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 m_e r}. \quad (5.3.5)$$

С другой стороны из формулы (5.3.3):

$$V = \frac{n\hbar}{m_e r_n}. \quad (5.3.6)$$

Из формул (5.3.3) и (5.3.6) получим:

$$r_n = \frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{m_e e^2} n^2, \quad (5.3.7)$$

где $n = 1, 2, 3, \dots$

Потенциальная энергия E_n электростатического взаимодействия электрона с ядром в атоме водорода:

$$E_n = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}. \quad (5.3.8)$$

Кинетическая энергия электрона:

$$E_k = \frac{m_e V^2}{2} = \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r}. \quad (5.3.9)$$

С учетом формул (5.3.7), (5.3.8) и (5.3.9) получим выражение для полной энергии системы:

$$E = E_n + E_k = -\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r} = -\frac{m_e e^4}{32\pi^2 \epsilon_0^2 \hbar^2} \cdot \frac{1}{n^2}. \quad (5.3.10)$$

где n – главное квантовое число ($n = 1, 2, 3, \dots$)

При переходе электрона с одной орбиты на другую ($r_m \rightarrow r_n$) энергия атома изменится на величину:

$$\Delta E = E_n - E_m = \frac{m_e e^4}{32\pi^2 \epsilon_0^2 \hbar^2} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right). \quad (5.3.11)$$

Частота кванта, соответствующего этому переходу, равна:

$$\nu_{\min} = \frac{\Delta E}{h} = \frac{\Delta E}{2\pi\hbar} = \frac{m_e e^4}{64\pi^3 \epsilon_0^2 \hbar^3} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right). \quad (5.3.12)$$

Сравнивая формулы (5.3.2) и (5.3.12) мы получим выражение для постоянной Ридберга R :

$$R = \frac{m_e e^4}{64\pi^3 \epsilon_0^2 \hbar^3} = 3,29 \cdot 10^{15} \text{ c}^{-1} \text{ или } R = 1,1 \cdot 10^7 \text{ м}^{-1}. \quad (5.3.13)$$

Примеры решения задач

Задача 1.

Определить первый боровский радиус орбиты в атоме водорода и скорость движения электрона по этой орбите.

Решение:

Радиус n -й орбиты в водородоподобном атоме, заряд ядра которого равен Ze (Z – атомный номер элемента), e – заряд электрона, определяется по формуле (5.3.10):

$$r_n = \frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{m_e Z e^2} \cdot n^2 = \frac{\epsilon_0 h^2}{\pi m_e Z e^2} \cdot n^2. \quad (5.3.14)$$

где n – номер орбиты, m_e – масса электрона.

Подставляя числовые значения, соответствующие условия задачи $n = 1$ и $Z = 1$, получим:

$$r_1 \approx 0,53 \cdot 10^{-10} \text{ м.}$$

По второму постулату Бора (5.3.6) момент импульса электрона на n -й орбите равен:

$$m_e V r_n = n \hbar. \quad (5.3.15)$$

Принимая во внимание, что $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ и, выразив из формулы (5.3.15)

скорость электрона, получим:

$$V = \frac{n \hbar}{2\pi m_e r_n}. \quad (5.3.16)$$

Подставляя значения $r_1 \approx 0,53 \cdot 10^{-10} \text{ м}$ и $n = 1$ получим:

$$V \approx 2,2 \cdot 10^6 \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Ответ: $r_1 \approx 0,53 \cdot 10^{-10} \text{ м}$, $V \approx 2,2 \cdot 10^6 \frac{\text{м}}{\text{с}}$.

Задача 2.

Определить длину волны λ спектральной линии, соответствующей переходу электрона в атоме водорода с шестой орбиты на вторую ($m = 6, n = 2$).

Решение:

Длина волны λ фотона, испускаемого при переходе электрона в атоме водорода, определяется по формуле (5.3.3) и учитывая, что $\nu = \frac{c}{\lambda}$ получим:

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{R}{c} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right), \quad (5.3.17)$$

где R – постоянная Ридберга, m и n – номера орбит, между которыми происходит переход электрона, c – скорость света в вакууме ($c \approx 3 \cdot 10^8 \frac{м}{с}$).

Возведем формулу (5.3.17) в степень -1:

$$\lambda = \frac{c}{R \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right)} \quad (5.3.18)$$

Подставим числовые значения в (5.3.18):

$$\lambda \approx 4,1 \cdot 10^{-7} \text{ м.}$$

$$\text{Ответ: } \lambda \approx 4,1 \cdot 10^{-7} \text{ м.}$$

Задачи

- 5.3.01 Вычислить радиусы r_2 и r_3 второй и третьей орбит в атоме водорода.
- 5.3.02 Определить частоту обращения электрона на второй орбите атома водорода.
- 5.3.03 Определить длину волны λ , соответствующую третьей спектральной линии в серии Бальмера.
- 5.3.04 Атомарный водород, возбужденный светом определенной длины волны, при переходе в основное состояние испускает только три спектральные линии. Определить длины волн этих линий и указать, каким сериям они принадлежат.
- 5.3.05 Определить скорость V электрона на второй орбите атома

водорода.

- 5.3.06 Найти наибольшую λ_{\max} наименьшую λ_{\min} длины волн в первой инфракрасной серии спектра водорода (серии Пашена).
- 5.3.07 Определить наименьшую E_{\min} и наибольшую E_{\max} энергии фотона в ультрафиолетовой серии спектра водорода (серии Лаймана).
- 5.3.08 Фотон с энергией $E = 16,5$ эВ выбил электрон из невозбужденного атома водорода. Какую скорость V будет иметь электрон вдали от ядра атома?
- 5.3.09 Атом водорода испустил фотон с длиной волны $\lambda = 4,86 \cdot 10^{-7}$ м. На сколько изменилась энергия электрона в атоме?
- 5.3.10 Сколько линий спектра атома водорода попадает в видимую область ($\lambda = 0,4 \div 0,76$ мкм)? Вычислить длины волн этих линий.

5.4. ВОЛНОВЫЕ СВОЙСТВА ЧАСТИЦ.

Теоретический минимум

Изучение свойств колебаний и волн показывает, что именно *интерференция и дифракция являются характерными признаками волнового процесса*. Интерференцию и дифракцию света на опыте наблюдали более двухсот лет назад, а теоретический анализ системы уравнений электромагнитного поля, проведенный Дж. Максвеллом, показал, что свет – это электромагнитная волна, характеристиками которой являются частота ν (или ω) и длина волны λ (или обратная ей величина – волновой вектор $k = \frac{2\pi}{\lambda}$).

С другой стороны, с развитием техники физического эксперимента, стали наблюдаться явления, которые указывали на то, что в ряде случаев свет ведет себя как поток частиц (корпускул). На это указывали экспериментальные и теоретические исследования внешнего фотоэффекта, излучения абсолютно черного тела и излучения линейчатых характеристических спектров атомами. Эксперименты А. Комптона обнаружили существование частицы электромагнитной природы, с нулевой массой покоя и потому движущейся со скоростью света, названной позже *фотоном*. Динамическими характеристиками, описывающими свойства частиц, являются кинетическая энергия $E_{кин}$ и импульс p . Для фотонов эти величины связаны с волновыми характеристиками соотношениями:

$$E = h\nu, \quad (5.4.1)$$

$$p = \frac{h}{\lambda}. \quad (5.4.2)$$

Последнее соотношение (5.4.2) следует непосредственно из линейного характера дисперсии для электромагнитных волн: $p = \frac{E}{c} = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda}$.

Из (5.4.1) и (5.4.2) следует, что *волновые* характеристики фотона ν , λ и его *корпускулярные* характеристики E , p связаны между собой с помощью постоянной Планка h .

По идее Л. де Бройля, для электрона, являющегося микроскопической частицей *вещества*, соотношения (5.4.1) и (5.4.2) также должны соблюдаться, но при этом следует считать исходными характеристиками E , p , причем под E следует подразумевать кинетическую энергию $E_{кин}$, т.к. масса покоя электрона m_e отлична от нуля и, следовательно, дисперсия (зависимость энергии частицы от импульса) отлична от линейной:

$$v = \frac{E_{кин}}{h}, \quad (5.4.3)$$

$$\lambda = \frac{h}{p}. \quad (5.4.4)$$

После экспериментального подтверждения справедливости соотношения (5.4.4) сначала для электронов, а в последующем и для всех микрочастиц вещества, стал ясен фундаментальный характер этого качества микрообъектов, а само это качество было названо «корпускулярно-волновым дуализмом». Длину волны, рассчитанную по формуле (5.4.4), принято называть «дебройлевской длиной волны».

Поскольку импульс движущегося материального тела определяется формулой:

$$p = \frac{mV}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad (5.4.5)$$

где V – скорость движения тела, c – скорость света в вакууме, то, подставляя (5.4.5) в (5.4.4), получим:

$$\lambda = \frac{h\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{mV}. \quad (5.4.6)$$

Для нерелятивистских частиц ($V \ll c$) можно упростить формулу (5.4.6):

$$\lambda = \frac{h}{mV}. \quad (5.4.6 a)$$

Почему же не обнаруживаются у окружающих нас макроскопических тел волновых свойств? Посчитаем для примера длину волны де Бройля для тела массой $m = 1 \text{ г}$, которое движется со скоростью $V = 0,6 \frac{M}{c}$. С помощью формулы (5.4.6 а) не трудно вычислить:

$$\lambda = \frac{h}{mV} = \frac{6,626 \cdot 10^{-34}}{0,5 \cdot 10^{-3}} \cong 10^{-30} \text{ м, что в } 10^{20} \text{ раз меньше размеров атома.}$$

Столь незначительного волнового свойства мы, конечно же, обнаружить не можем!

Примеры решения задач

Задача 1.

Кинетическая энергия протона $E_{кин}$ в 4 раза меньше его энергии покоя E_0 . Вычислить дебройлевскую длину волны протона λ .

Решение:

Длина волны де Бройля λ определяется по формуле (5.4.4):

$$\lambda = \frac{h}{p}$$

Поскольку по условию задачи:

$$E_{кин} = \frac{E_0}{4}, \quad (5.4.7)$$

т. е. кинетическая энергия $E_{кин}$ протона сравнима с его энергией покоя E_0 , то для кинетической энергии нужно использовать релятивистское выражение:

$E_{кин} = E - E_0$, где $E_0 = mc^2$ и $E = \sqrt{p^2 c^2 + E_0^2}$. Отсюда получим:

$$p^2 c^2 = E^2 - E_0^2 = (E + E_0) \cdot E_{кин}, \text{ следовательно}$$

$$p = \frac{1}{c} \sqrt{E_{кин} (E_{кин} + 2E_0)}. \quad (5.4.8)$$

Подставляя в (5.4.8) условие (5.4.7), найдем:

$$p = \frac{3}{4} \cdot \frac{E_0}{c}. \quad (5.4.9)$$

С учетом равенства (5.4.9) выражение (5.4.4) примет вид:

$$\lambda = \frac{4}{3} \cdot \frac{hc}{E_0}. \quad (5.4.10)$$

Подставляя в (5.4.10) числовые значения, получим:

$$\lambda \approx 1,77 \cdot 10^{-15} \text{ м.}$$

Ответ: $\lambda \approx 1,77 \cdot 10^{-15} \text{ м.}$

Задачи

- 5.4.01 Определить длину волны де Бройля λ характеризующую волновые свойства электрона, если его скорость $V = 10^6 \text{ м/с}$. Сделать такой же подсчет для протона.
- 5.4.02 Какую ускоряющую разность потенциалов U должен пройти электрон, чтобы длина волны де Бройля λ была равна $0,1 \text{ нм}$?
- 5.4.03 Найти длину волны де Бройля λ для электрона, движущегося по круговой орбите атома водорода, находящегося в основном состоянии.
- 5.4.04 Электрон движется со скоростью $V = 2 \cdot 10^8 \text{ м/с}$. Определить длину волны де Бройля λ , учитывая изменение импульса электрона в зависимости от скорости ($p = \frac{mV}{\sqrt{1-\beta^2}}$, где $\beta = \frac{V}{c}$).
- 5.4.05 Определить длину волны де Бройля λ электрона, если его кинетическая энергия $E_k = 1 \text{ кэВ}$.
- 5.4.06 Найти длину волны де Бройля λ протона, прошедшего ускоряющую разность потенциалов U : 1) 1 кВ ; 2) 1 МВ .
- 5.4.07 Кинетическая энергия протона равна его энергии покоя. Вычислить длину волны де Бройля для такого протона.
- 5.4.08 Определить кинетическую энергию протона и электрона, для которых длина волны де Бройля равна $0,06 \text{ нм}$.

- 5.4.09 Электрон прошел ускоряющую разность потенциалов U . Найти длину волны де Бройля для случаев: $U_1 = 51 \text{ В}$ и $U_2 = 510 \text{ кВ}$.
- 5.4.10 Протон обладает кинетической энергией, равной энергии покоя. Во сколько раз изменится длина волны де Бройля протона, если его кинетическая энергия увеличится в 2 раза?

5.5. УРАВНЕНИЕ ШРЕДИНГЕРА

Теоретический минимум

Дуализм микромира, как фундаментальное качество существования микрочастиц, получил свое аналитическое выражение в форме, так называемого, принципа неопределенностей В. Гейзенберга, в котором **неопределенности дополнительных по отношению друг к другу динамических величин** входят в виде произведения, и это произведение принципиально не может быть равно нулю. Дополнительными величинами могут быть одноименные проекции радиус-вектора и импульса, например, пара x и p_x или y и p_y , или пара z и p_z ; дополнительными также являются пара энергия-время, определяющая естественные ширины линий излучения. Так, например, для проекций на ось y принцип неопределенностей записывается в виде:

$$\Delta y \cdot \Delta p_y \geq \frac{h}{2}, \quad (5.5.1)$$

где Δy и Δp_y – неопределенности положения микроскопического объекта на оси y и соответствующей проекции его импульса, а h – постоянная Планка.

Продемонстрируем возникновение (5.5.1) на примере рассмотрения прохождения фотонами щели в экране I. С волновой точки зрения, нужно рассмотреть дифракцию монохроматической волны на щели. Иначе говоря, пусть плоская монохроматическая волна с амплитудой A , падает на экран I (см. Рис. 5.5.1), причем волновой вектор k ориентирован перпендикулярно экрану I. В этом экране имеется щель BB , через которую свет проходит и достигая экрана II, освещает не только проекцию щели $B'B'$, но и частично область геометрической тени, доходя до точек $B''B''$. Данное явление есть следствие *волнового* характера процесса распространения фотонов в пространстве и называется дифракцией Фраунгофера на щели. Расчет характера углового распределения интенсивности света на экране II показывает, что экрана достигает монохроматическая волна, амплитуда которой $B(\Theta)$ зависит от

ширины щели b и от угла отклонения дифрагирующего луча от направления падения волны Θ :

$$B(\Theta) = A \frac{\text{Sin}\left(\frac{kb \cdot \text{Sin}\Theta}{2}\right)}{\frac{kb \cdot \text{Sin}\Theta}{2}}, \quad (5.5.2)$$

где $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ - волновое число.

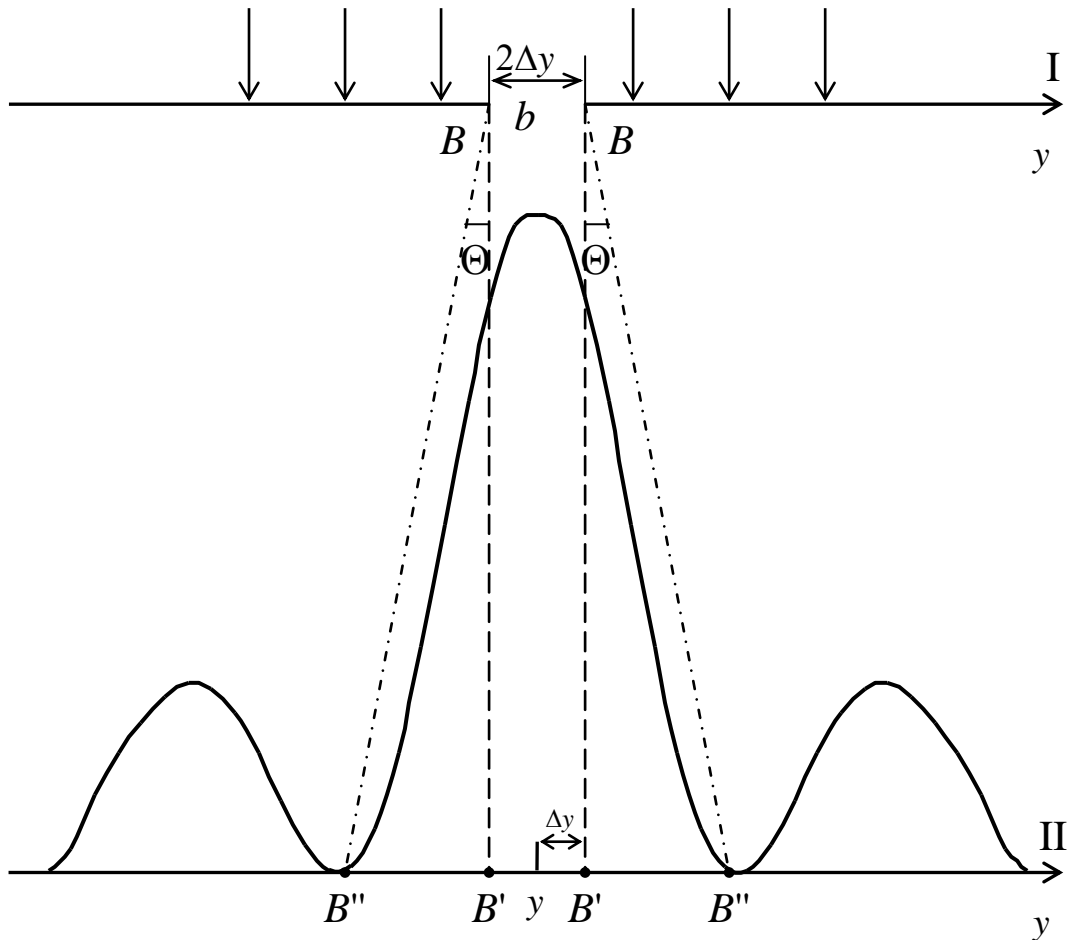


Рис. 5.5.1.

Из (5.5.2) следует, что свет может попасть практически в любую точку на оси y экрана Π , но наибольшая вероятность (т. е. наибольшая интенсивность) соответствует значениям угла Θ от нуля до значения, при котором выполняется равенство:

$$\frac{kb \cdot \text{Sin}\Theta}{2} = \pi. \quad (5.5.3)$$

Отсюда получаем условие на границу углового распределения в точках B'' :

$$b \cdot \sin\Theta = \lambda. \quad (5.5.4)$$

Рассматривая это соотношение с корпускулярной точки зрения, т. е. точки зрения движения фотона, видим, что фотон имел координату y (на экране Γ) с неопределенностью $2\Delta y = b$ и импульс $p_x = p$, $p_y = 0$. Чтобы этот фотон мог достигнуть областей $B''B''$, необходимо чтобы фотон, первоначально имевший импульс p_y , равный нулю, теперь (как частица) приобрел импульс p_y с неопределенностью $\Delta p_y = p \sin\Theta$. Следовательно, (5.5.4) можно представить в виде:

$$2\Delta y \sin\Theta = \lambda = \frac{h}{p} \text{ или } \Delta y \cdot \Delta p_y = \frac{h}{2}, \text{ где использовано} \quad (5.5.5)$$

соотношение де Бройля (5.4.4)

Учитывая, что величина $\Delta p = p \sin\Theta$ должна отвечать большим угловым значениям, чтобы фотон мог достигнуть больших значений y , заменяем окончательно знак «равно» на знак «больше или равно»:

$$\Delta y \cdot \Delta p_y \geq \frac{h}{2} \quad (5.5.5a)$$

Полученное соотношение и выражает принцип неопределенностей (5.5.1). Из (5.5.1) следует, что чем точнее мы будем определять, где находится микрочастица, тем хуже мы можем измерить ее импульс. Поэтому описание динамики микрочастицы в рамках классической механики, где для задания состояния частицы требуется точное знание одновременно и координат и компонент вектора импульса (с неопределенностью, равной нулю) невозможно: в квантовой механике понятие траектории отсутствует, а, значит, описание динамики квантовой частицы нужно вести по-другому.

Итак, в квантовой физике можно говорить только о вероятности найти частицу в какой-либо области пространства. Шредингер предложил описывать состояние частицы, так называемой, волновой функцией $\Psi(x, y, z, t)$, которая отвечала бы следующим условиям:

1. $dw = |\Psi|^2 dV$ - вероятность найти частицу в объеме dV ;
2. $\int_{-\infty}^{\infty} |\Psi|^2 dV = 1$ - условие нормировки;
3. Ψ должна быть однозначной;
4. Ψ и $\frac{\partial \Psi}{\partial x}$ должны быть непрерывны.

Шредингер получил для стационарных состояний (не зависящих от времени) уравнение:

$$\nabla^2 \psi + \frac{2m}{\hbar^2} (E - U) \psi = 0, \quad (5.5.6)$$

где $\nabla^2 \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}$, E – полная энергия частицы в стационарном состоянии, U – потенциальная энергия частицы, m – ее масса.

Будем рассматривать одномерное движение частицы в бесконечно глубокой прямоугольной потенциальной яме (см. Рис. 5.5.2). Уравнение Шредингера запишем так:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{2m}{\hbar^2} (E - U) \psi = 0, \quad (5.5.7)$$

где: $U(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0; a] \\ \infty, & x \in (-\infty; 0) \cup (a; \infty). \end{cases}$

Условие для Ψ на стенках ямы: $\Psi(0) = \Psi(a) = 0$.

Уравнение Шредингера внутри ямы ($U = 0$) используя (5.5.7):

$$\frac{d^2 \psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} E \psi = 0, \quad (5.5.8)$$

или, обозначив $\frac{2m}{\hbar^2} E = k^2$ получим:

$$\frac{d^2 \psi}{dx^2} + k^2 \psi = 0. \quad (5.5.8a)$$

Это известное уравнение гармонического осциллятора, общее решение которого:

$$\psi(x) = A \cdot \text{Sink}x + B \cdot \text{Sink}x. \quad (5.5.9)$$

Из условия $\Psi(0)=0$, получим $B=0$ и $\psi(x)=A \cdot \text{Sink}x$. Из $\Psi(a)=0$ получим $A \cdot \text{Sink}a=0$. Это возможно лишь, когда $ka = \pi n$ ($n \neq 0, n \in Z$). Далее возводя во вторую степень правую и левую части уравнения $k^2 a^2 = \pi^2 n^2$, и учитывая, что $k^2 = \frac{2m}{\hbar^2} E$, получим:

$$E = \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{2ma^2}. \quad (5.5.10)$$

Следовательно, полная энергия стационарного состояния квантуется: она может принимать лишь те значения, которые разрешены выражением (5.5.10).

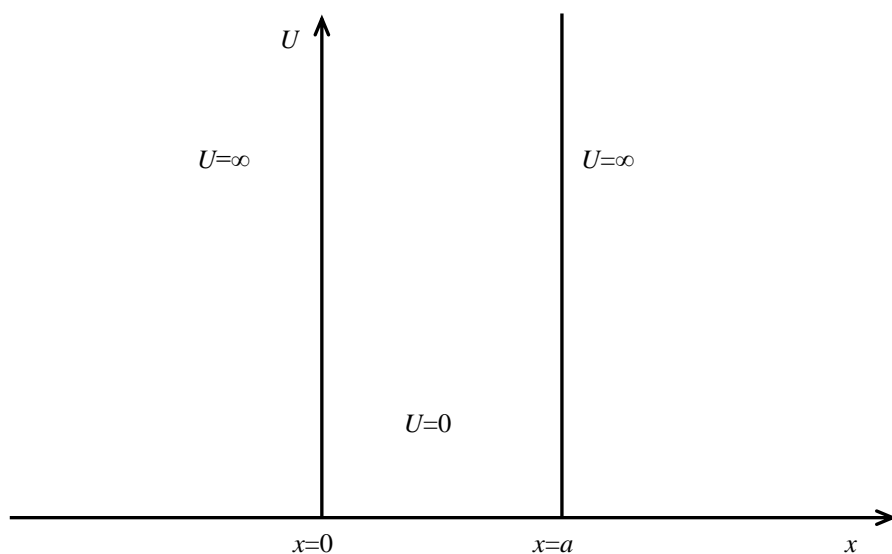


Рис. 5.5.2.

Если в классической физике вероятность обнаружить частицу в какой-либо точке потенциальной ямы одинакова для всех точек ямы, то в квантовой физике эта вероятность определяется квадратом волновой функции.

В квантовой механике меняется также характер прохождения частицей потенциального барьера.

Представим частицу, которая движется в положительном направлении оси x . Пусть эта частица имеет энергию, равную E . На пути этой частицы имеется потенциальный (энергетический) барьер (см. Рис. 5.5.3), высотой U_0 и шириной a . Согласно классической физике частица не сможет проникнуть из области (1) в область (2), а затем в область (3) если $E < U_0$. Имея энергию $E < U_0$,

классическая частица всегда отразится от стенки барьера (в $x = 0$) и продолжит движение в противоположном направлении. Классическая частица у которой $E > U_0$, всегда пройдет барьер, то есть проследует из (1) в (2) и далее в (3), как бы над барьером.

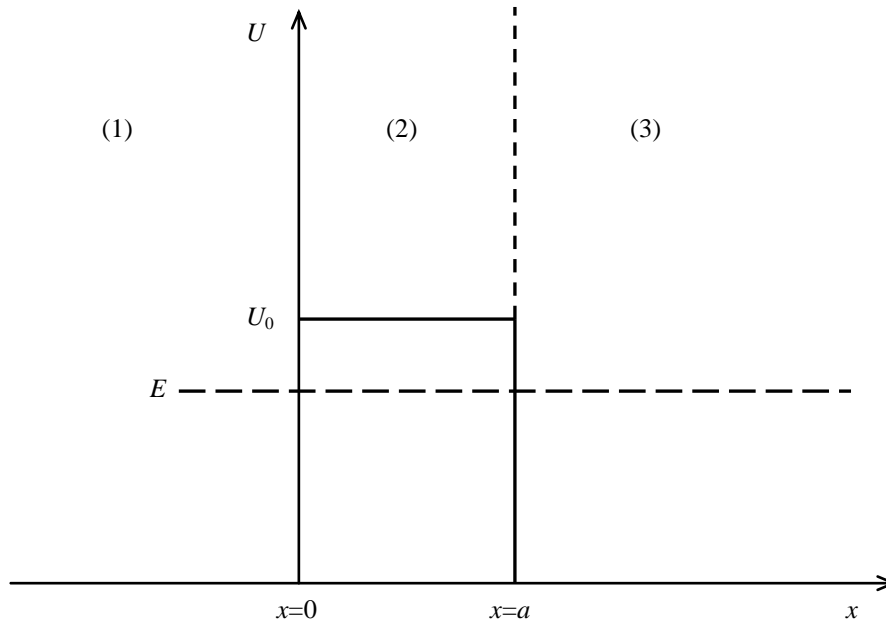


Рис. 5.5.3.

Для частиц с квантовым поведением все иначе: например, при $E > U_0$ имеется отличная от нуля вероятность того, что частица не сможет проникнуть из области (1) в область (2); соответственно, при $E < U_0$ вероятность проникнуть в область (3) отлична от нуля.

Для потенциального барьера конечной ширины a (см. Рис. 5.5.3) эта вероятность пропорциональна отношению квадратов модулей волновых функций частицы в областях (3) и (1):

$D = \frac{|\psi_3|^2}{|\psi_1|^2}$; величина D называется

коэффициентом прозрачности барьера. Решая уравнение Шредингера (5.5.7) для областей (1), (2) и (3) (то есть находя Ψ_1 , Ψ_2 и Ψ_3), можно получить для этого коэффициента D следующее выражение:

$$D \approx \exp\left[-\frac{2a}{\hbar} \sqrt{2m(U_0 - E)}\right], \quad (5.5.11)$$

где m – масса частицы, $\hbar = \frac{h}{2\pi}$.

Возможность для квантовой частицы, имеющей $E < U_0$, преодолеть потенциальный энергетический барьер U_0 называется туннельным эффектом.

Для потенциального барьера бесконечной ширины (см. Рис. 5.5.4) вероятность отражения частицы (при $E > U_0$), можно найти по формуле:

$$R = \left| \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \right|^2, \quad (5.5.12)$$

где k_1 и k_2 – волновые числа (для областей (1) и (2)).

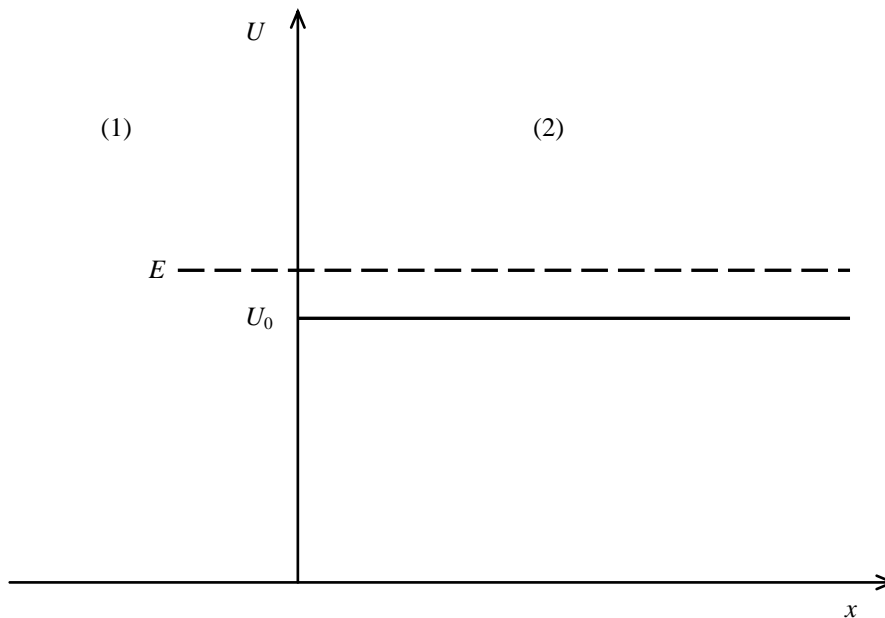


Рис. 5.5.4.

Примеры решения задач

Задача 1.

Среднее время жизни возбужденных состояний атома составляет 10 нс . Вычислить естественную ширину спектральной линии ($\lambda = 0,7 \text{ мкм}$), соответствующую переходу между возбужденными уровнями атома.

Решение:

При переходе электрона из одного стационарного состояния в другое излучается (или поглощается) фотон, энергия которого равна:

$$\frac{hc}{\lambda} = E_m - E_n. \quad (5.5.13)$$

Следовательно, неопределенность длины волны $\Delta\lambda$ излучения связана с неопределенностью энергии уровней ΔE_n и ΔE_m атома соотношением:

$$\frac{hc}{\lambda^2} \Delta\lambda = \Delta E_n + \Delta E_m. \quad (5.5.14)$$

Согласно соотношению неопределенностей Гейзенберга (5.5.1) для энергии частицы ΔE и времени Δt :

$$\Delta E \Delta t \geq \frac{h}{2\pi}, \quad (5.5.15)$$

где Δt – неопределенность времени перехода атома из одного стационарного состояния в другое.

Поскольку Δt не превышает среднее время жизни τ возбужденного состояния атома, то минимальная неопределенность энергии возбужденных уровней, согласно (5.5.15), равна:

$$\Delta E_{\min} = \frac{h}{2\pi\tau}. \quad (5.5.16)$$

Из (5.5.14) с учетом (5.5.16) найдем минимальную неопределенность длины волны излучения, которая называется естественной шириной спектральной линии:

$$\Delta\lambda_{\min} = \frac{\lambda^2}{2\pi c} \left(\frac{1}{\tau_n} + \frac{1}{\tau_m} \right). \quad (5.5.17)$$

Если одно из состояний, между которыми совершается переход, является основным и поскольку для основного состояния $\tau = \infty$, то для возбужденных состояний с одинаковым временем жизни $\tau_n = \tau_m = \tau$ имеем:

$$\Delta\lambda_{\min} = \frac{\lambda^2}{2\pi c \tau}. \quad (5.5.18)$$

Подставляя в (5.5.17) числовые значения, получим:

$$\Delta\lambda_{\min} \approx 5,2 \cdot 10^{-14} \text{ м.}$$

Ответ: $\Delta\lambda_{\min} \approx 5,2 \cdot 10^{-14} \text{ м.}$

Задача 2.

Частица в потенциальной яме шириной l находится в возбужденном состоянии. Определить вероятность w нахождения частицы в интервале $0 < x < \frac{l}{4}$ на втором энергетическом уровне.

Решение:

Нормированная волновая функция $\Psi(x)$ частицы в потенциальной яме шириной l на n -ом энергетическом уровне имеет вид согласно формуле (5.5.9) с коэффициентом $B = 0$:

$$\psi(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \cdot \text{Sin} \frac{\pi n x}{l}. \quad (5.5.19)$$

Вероятность нахождения частицы в заданном интервале определяется интегралом квадрата модуля волновой функции:

$$w = \int_0^{\frac{l}{4}} |\psi(x)|^2 dx = \int_0^{\frac{l}{4}} \left(\sqrt{\frac{2}{l}} \cdot \text{Sin} \frac{\pi n x}{l} \right)^2 dx = \frac{2}{l} \int_0^{\frac{l}{4}} \text{Sin}^2 \frac{\pi n x}{l} dx. \quad (5.5.20)$$

Известно, что:

$$\sin^2 \alpha = \frac{1}{2} (1 - \cos 2\alpha). \quad (5.5.21)$$

Тогда:

$$\sin^2 \frac{\pi n x}{l} = \frac{1}{2} \left(1 - \cos \frac{2\pi n x}{l} \right). \quad (5.5.22)$$

Подставляя в формулу (5.5.20) для вероятности нахождения частицы в заданном интервале на втором ($n = 2$) энергетическом уровне:

$$w = \frac{1}{l} \int_0^{l/4} \left(1 - \cos \frac{2\pi n x}{l}\right) dx = \frac{1}{l} \int_0^{l/4} dx - \frac{1}{l} \int_0^{l/4} \cos 2\pi n \frac{x}{l} dx = \frac{1}{l} x \Big|_0^{l/4} - \frac{1}{2\pi n} \sin \frac{2\pi n x}{l} \Big|_0^{l/4} =$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{2\pi n} \sin \frac{\pi n}{2}. \quad (5.5.23)$$

Положив $n = 2$, получаем $w = \frac{1}{4}$.

Ответ: $w = \frac{1}{4}$.

Задачи

- 5.5.01 Оценить неточность Δr в определении положения электрона относительно ядра, движущегося в атоме водорода со скоростью $V = 1,5 \cdot 10^6$ м/с, если допускаемая неточность ΔV в определении скорости составляет 10 % от ее величины. Сравнить полученную неточность с диаметром d атома водорода, вычисленным по теории Бора для основного состояния, и указать, применимо ли понятие траектории в данном случае.
- 5.5.02 Во сколько раз дебройлевская длина волны λ частицы меньше неопределенности Δx ее координаты, которая соответствует относительной неопределенности импульса в 1 %?
- 5.5.03 Используя соотношение неопределенностей $\Delta r \cdot \Delta p \geq \frac{h}{2}$ оценить низший энергетический уровень электрона в атоме водорода. Принять линейные размеры атома $\Delta r \approx 0,1$ нм.
- 5.5.04 Оценить относительную ширину $\frac{\Delta \omega}{\omega}$ спектральной линии, если известны время жизни атома в возбужденном состоянии ($\tau \approx 10^{-8}$ с) и длина волны излучаемого фотона ($\lambda = 0,6$ мкм).

- 5.5.05 Электрон находится в бесконечной глубокой прямоугольной одномерной потенциальной яме шириной l . Написать уравнение Шредингера и его решение (в тригонометрической форме) для области $0 < x < l$.
- 5.5.06 Электрон находится в одномерной потенциальной яме с бесконечно высокими стенками. Ширина ямы l нм. Определить наименьшую разность энергетических уровней электрона.
- 5.5.07 Частица в бесконечно глубокой прямоугольной потенциальной яме шириной l находится в возбужденном состоянии ($n = 2$). Определить, в каких точках интервала ($0 < x < l$) плотность вероятности $[\psi_2(x)]^2$ нахождения частицы максимальна и минимальна.
- 5.5.08 Частица в потенциальной яме находится в основном состоянии. Какова вероятность w нахождения частицы: 1) в средней трети ящика; 2) в крайней трети ящика?
- 5.5.09 Электрон с энергией $E = 9 \text{ эВ}$ движется в положительном направлении оси x . При какой ширине « a » потенциального барьера коэффициент прозрачности $D = 0,1$, если высота барьера $U_0 = 10 \text{ эВ}$?
- 5.5.10 Электрон с энергией $E = 100 \text{ эВ}$ падает на потенциальный барьер высотой $U_0 = 64 \text{ эВ}$. Определить вероятность w того, что электрон отразится от барьера.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА №5

Студент должен решить 5 задач того варианта, номер которого совпадает с последней цифрой шифра зачетной книжки студента.

Вариант	Номер задачи				
	1	5.1.01	5.2.01	5.3.01	5.4.01
2	5.1.02	5.2.02	5.3.02	5.4.02	5.5.02
3	5.1.03	5.2.03	5.3.03	5.4.03	5.5.03
4	5.1.04	5.2.04	5.3.04	5.4.04	5.5.04
5	5.1.05	5.2.05	5.3.05	5.4.05	5.5.05
6	5.1.06	5.2.06	5.3.06	5.4.06	5.5.06
7	5.1.07	5.2.07	5.3.07	5.4.07	5.5.07
8	5.1.08	5.2.08	5.3.08	5.4.08	5.5.08
9	5.1.09	5.2.09	5.3.09	5.4.09	5.5.09
10	5.1.10	5.2.10	5.3.10	5.4.10	5.5.10

ЧАСТЬ VI

6.1. УРАВНЕНИЕ СОСТОЯНИЯ ГАЗА

Теоретический минимум

Термодинамика и молекулярная физика, взаимно дополняя друг друга, отличаются различным подходом к изучаемым явлениям.

Термодинамика изучает МАКРОскопические свойства тел и явлений природы, не входя в микроскопическое рассмотрение процессов. Основные выводы термодинамики основаны на законах, являющихся обобщением опытных фактов.

Молекулярная физика (молекулярно – кинетическая теория) исходит из того, что любое тело – твердое, жидкое или газообразное состоит из большого количества МИКРОчастиц (молекул или атомов). Эти частицы хаотически движутся. Молекулы и атомы взаимодействуют друг с другом (между ними могут действовать силы притяжения и отталкивания). При таком подходе наблюдаемые на опыте макроскопические параметры состояния тел, такие как температура, давление и т.д., являются результатом суммарного действия целого ансамбля микрочастиц. Задача описания движения каждой отдельной молекулы такого ансамбля была бы неоправданно сложной. Поэтому для описания поведения систем, состоящих из большого числа объектов, используют статистический метод, позволяющий перейти от характеристик движения одной частицы к средним величинам, характеризующим огромную совокупность частиц.

Исторически основные законы, управляющие тепловыми процессами, были определены в рамках макроскопического подхода. В дальнейшем в рамках молекулярно – кинетической теории термодинамические законы получили теоретическое обоснование и были объяснены с точки зрения микроскопических процессов. Следуя исторической традиции, мы будем применять термодинамический подход, а к статистическому методу будем прибегать лишь по мере необходимости.

В качестве основной термодинамической системы выберем идеальный

газ.

Идеальный газ – это модель, с помощью которой удобно описывать поведение реальных газов и их смесей. Примером идеального газа является реальный газ, если он достаточно разрежен (например, обычный воздух).

Идеальному газу принято приписывать следующие свойства:

1. собственным объемом всех молекул газа можно пренебречь по сравнению с объемом сосуда, в котором этот газ находится;
2. время столкновения молекул друг с другом пренебрежимо мало по сравнению со временем между двумя соударениями;
3. молекулы взаимодействуют между собой только при непосредственном упругом соударении, при этом они отталкиваются;
4. силы притяжения между молекулами идеального газа ничтожно малы и ими можно пренебречь;
5. столкновения молекул описываются законами классической механики.

В основе термодинамического метода лежит понятие о состоянии тела или системы, которое определяется параметрами состояния. Важную роль в формировании состояния системы играет взаимодействие её с окружением: в общем случае открытой системы происходит обмен с окружением как частицами (массой), так и энергией (в форме тепла и работы). Состояние системы, находящейся длительное время в тепловом контакте с окружающей средой (обмен энергией и работой), называют состоянием термодинамического (или теплового) равновесия, которое характеризуется определенными значениями макроскопических параметров: давлением P , абсолютной температурой T и объемом V . (Заметим, что это МАКРОскопические характеристики, т.е. величины, характеризующие газ в целом, а не отдельные составляющие его молекулы).

Если меняется хотя бы одна из этих величин, система (например, идеальный газ) переходит в другое состояние. Переход из одного состояния в другое называется процессом. Мы будем рассматривать равновесные процессы,

т. е. наши процессы таковы, что в каждый момент протекания процесса система находится в состоянии термодинамического равновесия.

Давлением P называется величина, равная отношению нормальной составляющей силы F_n к площади S , на которую действует эта сила:

$$P = \frac{F_n}{S}. \quad (6.1.1)$$

В системе СИ давление P измеряют в паскалях ($Па$). Так, атмосферное давление $P_{атм}$ при нормальных условиях (н. у.) приближенно равно $1,01 \cdot 10^5 Па$.

Температура характеризует степень нагретости тел. Абсолютная температура T в системе СИ измеряется в Кельвинах (K). Она не может быть отрицательной, так как пропорциональна средней кинетической энергии частицы. Помимо шкалы Кельвина широко распространена шкала Цельсия. Между абсолютной температурой T и температурой по Цельсию t существует линейная связь: $T = t(^{\circ}C) + 273$. Так, температура воздуха при нормальных условиях (н. у.) равна $0^{\circ}C$ или $273 K$.

Газ всегда занимает весь предоставленный ему объем. Поэтому объем газа V равен объему сосуда, в котором газ находится. В системе СИ объем измеряют в $м^3$.

Параметры состояния термодинамического равновесия не являются независимыми. Закон, устанавливающий связь между ними называется уравнением состояния. Уравнение состояния идеального газа носит имя Клапейрона – Менделеева и имеет вид:

$$PV = \nu RT, \quad (6.1.2)$$

где $R = 8,31 \text{ Дж} / (\text{моль} \cdot \text{град})$ – универсальная газовая постоянная, а ν – количество вещества или – число молей газа.

Напомним, что одним молем называется количество вещества, содержащее число Авогадро $N_a = 6,02 \cdot 10^{23}$ частиц. Тогда количество вещества

ν можно определить как $\nu = N/N_a$, если мы знаем общее число частиц газа N или как $\nu = m/\mu$, если мы знаем массу газа m и массу одного моля газа μ .

Из (6.1.2.) легко получить другую часто используемую форму записи уравнения состояния идеального газа в виде:

$$P = \frac{1}{V} \frac{N}{N_a} RT = \frac{N}{V} \frac{R}{N_a} T = nkT, \quad (6.1.3)$$

где $n = N/V$ – концентрация, а $k = R/N_a$ ($k = 1,38 \cdot 10^{-23}$ Дж / град) – постоянная Больцмана.

Процесс, при котором $T = const$ называется изотермическим (см. Рис. 6.1.1). Следствием уравнения (6.1.2) для изотермического процесса является, так называемый, закон Бойля – Мариотта, который для неизменного числа молей газа может быть записан в виде:

$$PV = Const. \quad (6.1.4)$$

Процесс, идущий при постоянном давлении $P = Const$, называется изобарическим (Рис. 6.1.1) и подчиняется закону Гей – Люссака:

$$V/T = Const, \quad (6.1.5)$$

который также является следствием (6.1.2) для неизменного числа молей газа.

Процесс, идущий при постоянном объеме $V = Const$, носит название изохорического (Рис. 6.1.1) и подчиняется закону Шарля:

$$P/T = Const, \quad (6.1.6)$$

также следующему из (6.1.2) для неизменного числа молей газа.

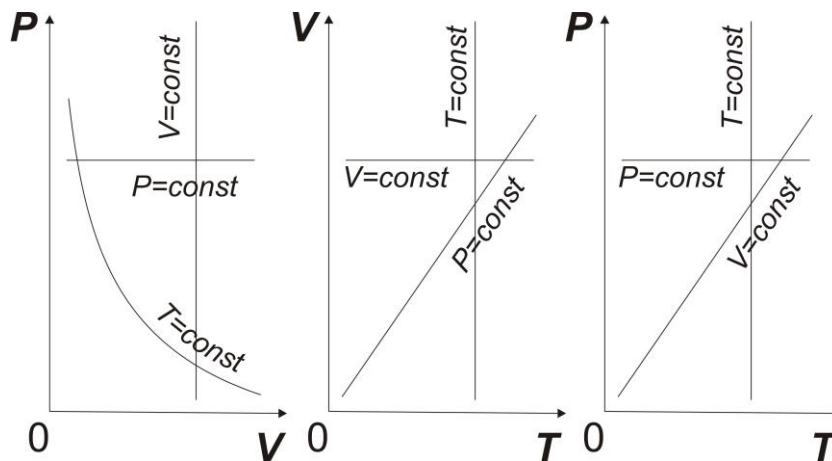


Рис. 6.1.1.

Из уравнения (6.1.3) следует, что

$$N = \frac{PV}{kT}. \quad (6.1.7)$$

Соотношение (6.1.7) носит название закона Авогадро, который утверждает, что в равных объемах разных газов при одинаковых давлении и температуре содержится одинаковое число молекул.

Из уравнения состояния в форме (6.1.3) следует закон Дальтона:

$$P = P_1 + P_2 + P_3 + \dots + P_n \quad (6.1.8)$$

– давление смеси идеальных газов равно сумме давлений газов, входящих в состав смеси (парциальных давлений).

По мере возрастания давления и температуры газ становится все менее похожим на идеальный, и в нем уже нельзя пренебрегать взаимным притяжением и отталкиванием молекул. Путем введения определенных поправок в уравнение состояния идеального газа (6.1.2), Ван-дер-Ваальсом было получено уравнение:

$$\left(P + \frac{N^2}{V^2} a \right) \cdot (V - Nb) = NkT, \quad (6.1.9)$$

где $k = R/N_a$ - постоянная Больцмана (см. (6.1.3)). Уравнение (6.1.9) достаточно хорошо работает в области низких температур и высоких давлений.

Коэффициенты a и b в уравнении Ван-дер-Ваальса (6.1.9) – это постоянные, измеряющиеся в системе СИ в $\text{Па} \cdot \text{м}^6$ и м^3 соответственно. Численные значения a и b различны для разных газов и определяются из опыта.

Примеры решения задач

Задача 1.

В закрытом сосуде объемом $V = 2 \text{ м}^3$ находится $m_1 = 2,7 \text{ кг}$ воды и $m_2 = 3,2 \text{ кг}$ кислорода. Найти давление P в сосуде при температуре $t = 527 \text{ }^\circ\text{C}$. Считать, что в этих условиях вся вода превращается в пар, который можно считать идеальным газом.

Решение:

При температуре $T = t + 273 = 800 \text{ К}$ в сосуде будет находиться смесь газов.

Парциальное давление каждого из них выразим из уравнения Клапейрона – Менделеева (6.1.2), записанного в виде:

$$PV = \frac{m}{\mu} RT. \quad (6.1.10)$$

Тогда для воды $P_1 = \frac{m_1}{V\mu_1} RT$, где $\mu_1 = 18 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$, а для кислорода

$$P_2 = \frac{m_2}{V\mu_2} RT, \text{ где } \mu_2 = 32 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}.$$

Согласно закону Дальтона (6.1.8) давление смеси газов равно сумме их парциальных давлений $P = P_1 + P_2$. Окончательно получим:

$$P = \frac{RT}{V} \left(\frac{m_1}{\mu_1} + \frac{m_2}{\mu_2} \right) = 8,3 \cdot 10^5 \text{ Па}.$$

Ответ: $P = 8,3 \cdot 10^5 \text{ Па}$.

Задача 2.

Плотность некоторого газа при температуре $t = 10 \text{ }^\circ\text{C}$ и давлении $P = 2 \cdot 10^5 \text{ Па}$ равна $\rho = 0,34 \text{ кг/м}^3$. Чему равна молярная масса μ этого газа?

Решение:

Запишем уравнение Клапейрона – Менделеева в виде $PV = \frac{m}{\mu} RT$.

Разделим в нем правую и левую часть на объем V . Тогда, учитывая, что $\rho = \frac{m}{V}$,

получим $P = \frac{\rho}{\mu} RT$, откуда следует, что $\mu = \frac{\rho}{P} RT$. Подставив числовые

данные, получим $\mu = 4 \text{ кг} / \text{кмоль}$.

Ответ: $\mu = 4 \text{ кг} / \text{кмоль}$.

Задачи

- 6.1.01 Какой объем V занимает смесь газов – азота массой $m_1 = 1 \text{ кг}$ и гелия массой $m_2 = 1 \text{ кг}$ при нормальных условиях ?
- 6.1.02 В баллонах вместимостью $V_1 = 20 \text{ л}$ и $V_2 = 44 \text{ л}$ содержится газ. Давление в первом баллоне $P_1 = 2,4 \text{ МПа}$, во втором – $P_2 = 1,6 \text{ МПа}$. Определить общее давление P смеси газа, которое установится после соединения баллонов, если температура газа осталась прежней.
- 6.1.03 В сосуде вместимостью $V = 0,01 \text{ м}^3$ содержится смесь газов – азота массой $m_1 = 7 \text{ г}$ и водорода массой $m_2 = 1 \text{ г}$ при температуре $T = 280 \text{ }^\circ\text{K}$. Определить давление P смеси газов.
- 6.1.04 Баллон вместимостью $V = 30 \text{ л}$ содержит смесь водорода и гелия при температуре $T = 300 \text{ }^\circ\text{K}$ и давлении $P = 828 \text{ кПа}$. Масса m смеси равна 24 г . Определить массу m_1 водорода и массу m_2 гелия.
- 6.1.05 В баллоне вместимостью $V = 25 \text{ л}$ находится водород при температуре $T = 290 \text{ }^\circ\text{K}$. После того как часть водорода израсходовали, давление в баллоне понизилось на $\Delta P = 0,4 \text{ МПа}$. Определить массу m израсходованного водорода.
- 6.1.06 Газ при температуре $T = 309 \text{ }^\circ\text{K}$ и давлении $P = 0,7 \text{ МПа}$ имеет плотность $\rho = 12 \text{ кг} / \text{м}^3$. Определить молярную массу газа μ .
- 6.1.07 В двух сосудах емкостью $V_1 = 3 \text{ л}$ и $V_2 = 5 \text{ л}$ находятся соответственно азот под давлением $P_1 = 1 \text{ атм}$ ($1 \text{ атм} = 10^5 \text{ Па}$)

и окись углерода (CO) под давлением $P_2 = 5 \text{ атм}$. Сосуды соединяются тонкой трубкой, объемом которой можно пренебречь. Найти установившееся давление P смеси, если начальная температура обоих газов равна температуре окружающей среды.

- 6.1.08 Баллон содержит $m_1 = 80 \text{ г}$ кислорода и $m_2 = 320 \text{ г}$ аргона. Давление смеси $P = 1 \text{ МПа}$, температура $T = 300 \text{ °К}$. Считая газы идеальными, определить объем баллона.
- 6.1.09 Найти число N молекул в $V = 1 \text{ см}^3$ и плотность ρ азота при давлении $P = 10^{-11} \text{ мм. рт. ст.}$ и температуре $t = 15 \text{ °С}$.
- 6.1.10 В баллоне емкостью $V = 30 \text{ л}$ находится сжатый воздух при температуре $t = 17 \text{ °С}$. После того, как часть воздуха израсходовали, давление понизилось на $\Delta P = 2 \cdot 10^5 \text{ Па}$. Какое количество воздуха было израсходовано, если температура его оставалась постоянной?

6.2. ПЕРВОЕ НАЧАЛО ТЕРМОДИНАМИКИ

Теоретический минимум

Термодинамический подход активно развивался под давлением необходимости решения задач, важных для практики: нужно было построить движитель, который совершал бы механическую работу за счет энергии тепла. С этой целью были определены центральные понятия термодинамики, такие как: работа, внутренняя энергия, энтропия, первое и второе начала. В описании термодинамического поведения системы важнейшую роль играет характер взаимодействия системы с окружением; по типу этого взаимодействия системы делятся на:

1. изолированные – система не обменивается с окружением ни веществом, ни энергией;
2. закрытые – обмен энергией (работой) происходит, а веществом – нет;
3. открытые – возможен обмен, как энергией (работой), так и веществом.

Рассмотрим газ, находящийся под поршнем в цилиндрическом сосуде (Рис. 6.2.1).

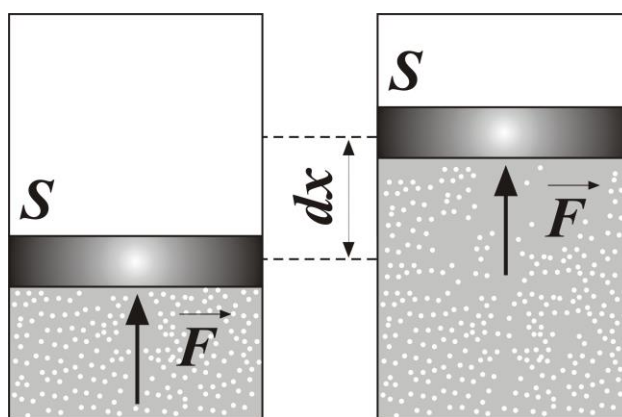


Рис. 6.2.1.

Если газ, расширяясь, передвигает поршень на малое расстояние dx , то газ совершает работу $\delta A = F \cdot dx$, где F – сила, действующая на поршень со стороны газа. Учитывая то, что $F = P \cdot S$ (см. 6.1.1) и изменение объема равно

$dV = S \cdot dx$, получим:

$$\delta A = PdV. \quad (6.2.1)$$

Формула (6.2.1) определяет бесконечно малую работу при бесконечно малом изменении объема газа. Если объем газа увеличивается ($dV > 0$), то $\delta A > 0$ т.е. газ, расширяясь, совершает работу. В противном случае $\delta A < 0$, и работа совершается над газом.

Полная работа определяется как интеграл:

$$A = \int_{V_1}^{V_2} \delta A = \int_{V_1}^{V_2} PdV \quad (6.2.2)$$

и графически может быть представлена как площадь под кривой 1 – 2 (площадь фигуры 1 – 2 – V_2 – V_1) на Рис. 6.2.2. (Напомним, что в системе СИ единицей измерения работы является Джоуль (Дж)).

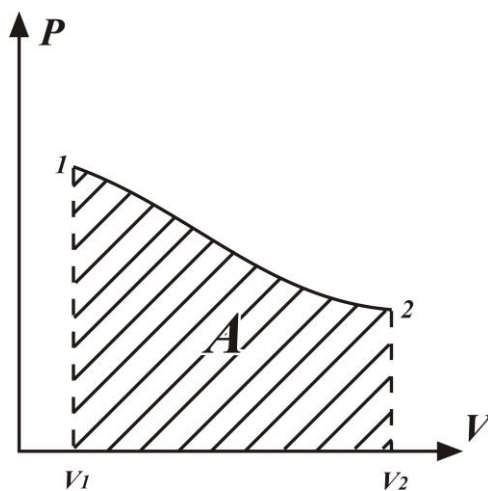


Рис. 6.2.2.

Определим количество теплоты Q как энергию, передаваемую путем теплообмена с окружающей средой (теплопроводность, конвекция, излучение). Единицей измерения Q в системе СИ будет тогда Джоуль (Дж).

Процессы, происходящие без теплообмена с окружающей средой так, что переданное количество теплоты $\delta Q = 0$, называются адиабатическими (Рис. 6.2.3).

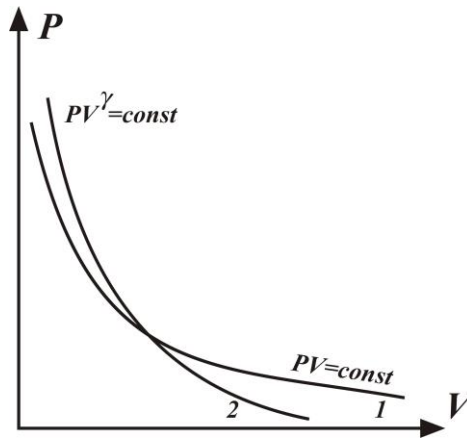


Рис. 6.2.3.

1 – график изотермического процесса;

2 – график адиабатического процесса.

Внутренняя энергия $U(T, V)$ – функция термодинамических параметров системы, изменение которой dU определяется работой δA , совершаемой над системой при адиабатическом процессе. Существование такой функции есть следствие первого начала термодинамики, согласно которому полный дифференциал внутренней энергии равен:

$$dU = \delta Q - \delta A. \quad (6.2.3)$$

Если количество теплоты сообщается телу, то $\delta Q > 0$, в противном случае $\delta Q < 0$.

Внутренняя энергия U в системе СИ измеряется в Джоулях. Она складывается из кинетической энергии хаотического теплового движения составляющих его частиц и потенциальной энергии их взаимодействия. Кинетическая и потенциальная энергия тела как целого, являясь механическими характеристиками, во внутреннюю энергию не входят.

Количество теплоты δQ и работа δA обозначаются иначе, чем приращение внутренней энергии dU . Это различие в обозначениях носит принципиальный характер. Дело в том, что внутренняя энергия является функцией состояния тела. Это означает, что всякий раз, когда система оказывается в данном состоянии, ее внутренняя энергия принимает присущее этому состоянию значение, независимо от предыстории системы. Следовательно, изменение dU при переходе системы из одного состояния в

другое равно разности значений внутренней энергии в этих состояниях, независимо от процесса:

$$\Delta U = \int_1^2 dU = U_2 - U_1. \quad (6.2.4)$$

Если система возвращается в исходное состояние, то изменение внутренней энергии в таком процессе равно нулю:

$$\oint dU = \int_1^1 dU = U_1 - U_1 = 0. \quad (6.2.5)$$

Известно, что в классической молекулярной физике в состоянии теплового равновесия на каждую степень свободы молекулы приходится энергия теплового движения, равная $kT/2$, где T – абсолютная температура, k – постоянная Больцмана. Напомним, что числом степеней свободы системы называют количество независимых параметров, задающих конфигурацию системы. Если i – число степеней свободы молекулы идеального газа, то $ikT/2$ – энергия теплового движения молекулы.

Внутренняя энергия U одного моля таких молекул (их количество в одном моле равно числу Авогадро N_a) равна:

$$U = \frac{iRT}{2}, \quad (6.2.6)$$

где $N_a k = R$ – универсальная газовая постоянная.

Работа и количество теплоты не являются функциями состояния. Совершенная работа и количество переданной теплоты существенно зависят от способа проведения процесса. Так, площадь под кривой Рис. 6.2.2 зависит от формы этой кривой, и, если система возвращается в исходное состояние через другие промежуточные состояния, т.е. по другой кривой, работа такого процесса не равна нулю: $A = \oint \delta A \neq 0$.

Для количества теплоты, переданного или полученного в ходе подобного процесса также справедливо: $Q = \oint \delta Q \neq 0$.

Количество теплоты, которое необходимо сообщить телу, чтобы увеличить его температуру на один градус, называется теплоемкостью тела:

$$c = \frac{dQ}{dT}. \quad (6.2.7)$$

Удельной теплоемкостью c называется теплоемкость, отнесенная к единице массы вещества. Ее размерность в системе СИ: Дж/(кг · К).

Молярной теплоемкостью C называется теплоемкость одного моля вещества. Ее размерность в системе СИ: Дж/(моль · К).

Связь между этими величинами определяется простым соотношением:

$$c = \frac{C}{\mu}, \quad (6.2.8)$$

где μ – молярная масса.

Теплоемкость зависит от вида процесса. Наиболее употребительными являются теплоемкость при постоянном объеме C_V и при постоянном давлении C_p .

При изохорном процессе ($V = const$) $\delta A = P \cdot dV = 0$ и, согласно первому закону термодинамики, $\delta Q = dU$ т.е. все тепло идет на увеличение внутренней энергии тела. Поэтому теплоемкость при постоянном объеме:

$$C_V = \left(\frac{\delta Q}{dT} \right)_V = \frac{dU}{dT}. \quad (6.2.9)$$

При изобарном процессе ($P = const$) теплоемкость равна $C_p = \left(\frac{\delta Q}{dT} \right)_p$, и применение первого начала термодинамики (6.2.3) дает:

$$C_p dT = dU + PdV = C_V dT + pdV. \quad (6.2.10).$$

Выразив из (6.1.2) PdV в виде $PdV = \nu R dT$, получим:

$$C_p = C_V + \nu R \quad (6.2.11)$$

или для одного моля газа ($\nu = 1$ моль):

$$C_p - C_V = R. \quad (6.2.12)$$

Формула (6.2.12) называется соотношением Майера.

Отметим также, что при вычислении работы в случае $P = const$ давление может быть вынесено из-под знака интеграла (6.2.2), и получается:

$$A = P(V_2 - V_1). \quad (6.2.13)$$

При изотермическом процессе ($T = const$) теплоемкость C обращается в бесконечность.

При адиабатическом процессе (δQ) из первого закона термодинамики (6.2.3) следует, что работа совершается газом за счет убыли внутренней энергии:

$$\delta A = -dU.$$

Адиабатический процесс описывается уравнением Пуассона

$$PV^\gamma = Const, \quad (6.2.14)$$

где $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$ – коэффициент Пуассона, называемый показателем адиабаты.

Из соотношения Майера (6.2.12) следует, что всегда $\gamma > 1$. Поэтому график адиабаты в координатах $P - V$ (Рис. 6.2.3) проходит более круто, чем график изотермы.

Первое начало термодинамики (6.2.3) позволяет в соответствии с данными выше определениями получить для молярной теплоемкости идеального газа, следующие соотношения:

$$C_v = \frac{i}{2} R; \quad (6.2.15)$$

$$C_p = \frac{i+2}{2} R. \quad (6.2.16.)$$

В широком диапазоне температур ($300\text{ K} < T < 800\text{ K}$) число степеней свободы i равно:

- $i = 3$ (для одноатомных газов);
- $i = 5$ (для двухатомных молекул с жесткой связью между атомами);
- $i = 6$ (для трех – и многоатомных газов).

Примеры решения задач

Задача 1.

Кислород массой $m = 800$ г, охлажденный от температуры $t_1 = 100$ °С до температуры $t_2 = 20$ °С, сохранил неизменный объем. Определить: количество теплоты Q , полученное газом; изменение ΔU внутренней энергии и совершенную газом работу.

Решение:

Работа является функцией процесса L : $A = \int_L \partial A = \int_L P(V)dV$. В нашей задаче процесс изохорный ($V = Const$); следовательно, $dV = 0$ и поэтому $A = 0$.

Первое начало термодинамики в нашем случае имеет вид:

$$\delta Q = dU \text{ или } Q = \Delta U. \quad (6.2.17)$$

Поскольку газ охладили, внутренняя энергия уменьшилась:

$$\Delta U = C_v(T_2 - T_1) < 0, \quad (6.2.18)$$

а $C_v = \frac{m}{\mu} R \frac{i}{2}$, где $i = 5$ для двухатомных молекул кислорода, а $\mu = 32 \cdot 10^{-3}$ кг/моль.

Подставляя числовые данные, получаем:

$$\Delta U = \frac{0,8 \cdot 8,31}{32 \cdot 10^{-3}} \cdot \frac{5}{2} (20 - 100) = -41,55 \text{ кДж.}$$

Соответственно, кислород не получил, а отдал тепло, на что указывает отрицательное значение «полученного» тепла:

$$Q = \Delta U = -41,55 \text{ кДж.}$$

Ответ: $Q = -41,55$ кДж, $\Delta U = -41,55$ кДж, $A = 0$.

Задача 2.

Гелий массой $m = 4$ кг, находившийся при $T = 273$ К, изотермически расширяется от объема V_1 до объема $V_2 = 2V_1$ за счет полученного извне тепла. Найти работу A , совершенную газом при расширении, и количество сообщенного газу тепла Q . Молярная масса гелия $\mu = 4 \cdot 10^{-3}$ кг/моль.

Решение:

Из уравнения Клапейрона-Менделеева (6.1.2) следует, что $P = \frac{m}{\mu V} RT$.

Тогда, согласно формуле (6.2.2) для $T = Const$ имеем:

$$A = \int_{V_1}^{V_2} P dV = \frac{mRT}{\mu} \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = \frac{mRT}{\mu} \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) = 1,57 \text{ МДж}.$$

Из формулы (6.2.14.) следует, что изменение внутренней энергии при изотермическом процессе $dU = 0$. Тогда по первому закону термодинамики (6.2.3) все сообщенное газу тепло идет на совершение работы, т.е. $Q = A = 1,57 \text{ МДж}$.

Ответ: $Q = 1,57 \text{ МДж}$, $A = 1,57 \text{ МДж}$.

Задачи

- 6.2.01 Водород занимает объем $V_1 = 10 \text{ м}^3$ при давлении $P_1 = 100 \text{ кПа}$. Газ нагрели при постоянном объеме до давления $P_2 = 300 \text{ кПа}$. Определить изменение ΔU внутренней энергии газа, работу A , совершенную газом и количество теплоты Q , сообщенное газу.
- 6.2.02 Баллон вместимостью $V = 20 \text{ л}$ содержит водород при температуре $T = 300 \text{ К}$ и под давлением $P = 0,4 \text{ МПа}$. Какими станут температура T_1 и давление P_1 , если газу сообщить количество теплоты $Q = 6 \text{ кДж}$.
- 6.2.03 Кислород нагревают при постоянном давлении $P = 80 \text{ кПа}$. При этом его объем увеличивается от $V_1 = 1 \text{ м}^3$ до $V_2 = 3 \text{ м}^3$. Определить изменение ΔU внутренней энергии кислорода; работу A , совершенную им при расширении; количество теплоты Q , сообщенное газу.
- 6.2.04 Расширяясь, водород совершил работу $A = 6 \text{ кДж}$. Определить количество теплоты Q , подведенное к газу, если процесс протекал изобарно.
- 6.2.05 Азот массой $m = 200 \text{ г}$ расширяется изотермически при температуре $T = 280 \text{ К}$, причем объем газа увеличивается в два

- раза. Найти совершенную при расширении газа работу A и количество теплоты Q , полученное газом.
- 6.2.06 При изотермическом расширении водорода массой $m = 1$ г, имевшего температуру $T = 280$ К, объем газа увеличился в три раза. Определить совершенную при расширении газа работу A и количество теплоты Q , полученное газом.
- 6.2.07 Азот, занимавший объем $V_1 = 10$ л под давлением $P_1 = 0,2$ МПа, изотермически расширился до объема $V_2 = 28$ л. Определить работу A расширения газа и количество теплоты Q , полученное газом.
- 6.2.08 При адиабатном расширении кислорода с начальной температурой $T_1 = 320$ К его внутренняя энергия уменьшилась на $\Delta U = 8,4$ кДж, а объем увеличился в $N = 10$ раз. Определить массу m кислорода.
- 6.2.09 Водород при нормальных условиях имел объем $V_1 = 100$ м³. Найти изменение ΔU внутренней энергии газа при его адиабатном расширении до объема $V_2 = 150$ м³.
- 6.2.10 Давление азота объемом $V = 3$ л при нагревании увеличилось на $\Delta P = 1$ МПа. Определить количество теплоты Q , полученное газом, если объем газа остался неизменным.

6.3. ВТОРОЕ НАЧАЛО ТЕРМОДИНАМИКИ

Теоретический минимум

Первый закон термодинамики следит за тем, чтоб полная энергия системы в ходе тепловых процессов оставалась постоянной. Согласно ему, внутреннюю энергию системы можно изменить, сообщая системе тепло или совершая над ней работу. Однако, первый закон термодинамики не дает никаких указаний относительно направления, в котором могут происходить процессы теплопередачи в природе. Например, он не запрещает самопроизвольную передачу тепла от холодного тела к горячему.

Второй закон термодинамики, напротив, позволяет судить о направлении протекания спонтанных (самопроизвольных) реальных физических процессов.

Система, помещенная в неизменные внешние условия, стремится перейти в стационарное состояние, в котором определяющие его термодинамические параметры (например, температура) не изменяются во времени.

Тогда состоянием термодинамического равновесия является стационарное (неизменное во времени) состояние термодинамически изолированной системы. При этом параметры системы имеют определенные значения, одинаковые для всех ее частей.

Процесс называется равновесным (квазистатическим), если состояние тела в любой момент времени является равновесным. В ходе равновесного процесса происходит лишь последовательная смена одних равновесных состояний другими. Важнейшим свойством любого равновесного процесса является его обратимость во времени. Обратимость означает возможность возвращения тела в первоначальное состояние через те же промежуточные состояния, которые были пройдены в прямой последовательности.

Неравновесным называется процесс, при котором хотя бы одно из состояний, проходимых телом, является неравновесным. Неравновесные процессы необратимы.

Свойства необратимости любых макроскопических процессов в

изолированной системе определяются изменением величины, которая называется энтропией S .

В термодинамике энтропия S вводится как величина, малое изменение которой dS связано с количеством теплоты δQ , переданной системе в равновесном (обратимом) процессе, соотношением:

$$dS = \frac{\delta Q}{T}. \quad (6.3.1)$$

Из (6.3.1) следует, что в системе СИ энтропия S измеряется в Дж/К.

Подставив (6.3.1) в первый закон термодинамики (6.2.3), получим:

$$dU = TdS - PdV. \quad (6.3.2)$$

Рассмотрим свойства энтропии, которые следуют из ее определения:

1. Энтропия системы нескольких тел равна сумме энтропий каждого тела (энтропия аддитивна).
2. Энтропия равновесных адиабатических процессов ($\delta Q = 0$) постоянна $S = Const$.
3. При постоянном объеме ($V = Const$) энтропия является монотонно возрастающей функцией внутренней энергии тела U .
4. Энтропия определена с точностью до произвольной константы интегрирования:

$$S = \int \frac{\delta Q}{T} + Const. \quad (6.3.3)$$

Поэтому физический смысл имеет не сама энтропия, а ее изменение:

$$\Delta S = \int \frac{\delta Q}{T}. \quad (6.3.4)$$

5. Энтропия является функцией состояния системы, т.е. изменение энтропии ΔS зависит только от начального и конечного состояния системы, но не от пути интегрирования:

$$\Delta S = \int_1^2 dS = S_2 - S_1. \quad (6.3.5)$$

Второе начало термодинамики, известное также как закон возрастания энтропии, гласит: в любой изолированной макроскопической системе

изменение энтропии при любом реальном процессе удовлетворяет неравенству $\Delta S \geq 0$. Причем, знак равенства относится к обратимым равновесным, а знак “ > “ к необратимым неравновесным процессам.

Таким образом, величина ΔS является количественной характеристикой степени необратимости процесса.

Закон возрастания энтропии имеет два следствия, которые исторически были первыми формулировками второго начала термодинамики:

Первая из них, данная Клаузиусом, такова:

Невозможен процесс, при котором тепло самопроизвольно переходит от тел менее нагретых к телам, более нагретым.

Другая формулировка принадлежит Кельвину:

Невозможно получить работу за счет систематического охлаждения одного тела без каких-либо изменений во всех других телах.

Круговым или циклическим называется процесс, в результате которого тело возвращается в исходное состояние. Циклические процессы осуществляются во всех тепловых двигателях, назначение которых производить работу за счет перераспределения тепла. Карно был предложен тепловой двигатель, работающий по циклу, состоящему из последовательно чередующихся двух изотерм и двух адиабат (Рис. 6.3.1).

Представим себе работу тепловой машины. В цилиндре такой машины помещается рабочее тело. Пусть для определенности это будет идеальный газ. Цилиндр можно приводить в тепловой контакт с двумя тепловыми резервуарами, имеющими постоянные температуры T_1 и T_2 ($T_1 > T_2$). Тепловой резервуар с более высокой температурой T_1 называется нагревателем, а с более низкой температурой T_2 – холодильником. Рабочее тело приводится в тепловой контакт с нагревателем, имеющим температуру T_1 . Затем, медленно уменьшая внешнее давление, его заставляют расширяться по изотерме 1 – 2 (Рис. 6.3.1). При этом от нагревателя заимствуется тепло Q_1 и производится работа A_{12} против внешнего давления. После этого систему заставляют расширяться по адиабате 2 – 3, пока ее температура не достигнет температуры холодильника T_2 .

При этом также совершается некая работа A_{23} против внешнего давления. В состоянии 3 систему приводят в тепловой контакт с холодильником и изотермически сжимают ее до некоторого состояния 4. При этом система совершает отрицательную работу A_{34} и отдает холодильнику некоторое количество теплоты Q_2 . Состояние 4 выбирается так, чтобы можно было сжатием по адиабате $4 - 1$ вернуть систему в исходное состояние 1. Для этого система должна совершить отрицательную работу A_{41} . В результате кругового процесса Карно внутренняя энергия системы не изменится, а потому произведенная ею работа равна:

$$A = A_{12} + A_{23} + A_{34} + A_{41} = Q_1 - Q_2. \quad (6.3.6)$$

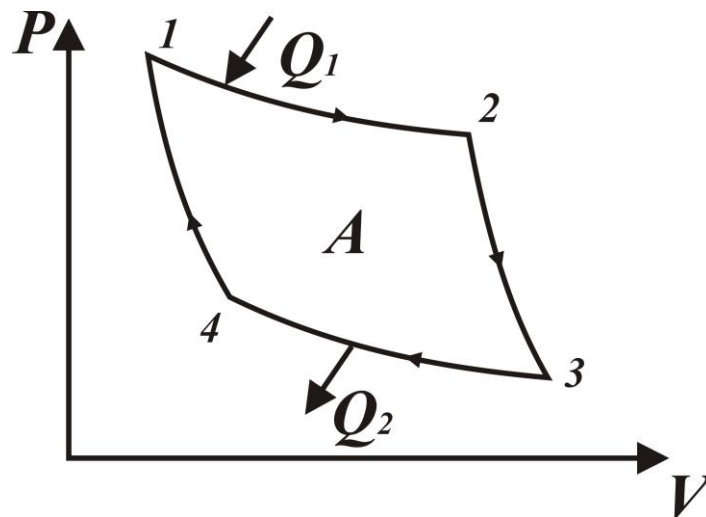


Рис. 6.3.1.

Опираясь на второй закон термодинамики, было доказано, что коэффициент полезного действия (К.П.Д.) η обратимого цикла Карно максимален (превышает аналогичные коэффициенты любого необратимого цикла) и определяется соотношением:

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}. \quad (6.3.7)$$

Формула (6.3.7) служит аналитическим выражением теоремы Карно, которая гласит, что коэффициент полезного действия тепловой машины, работающей по циклу Карно, зависит только от температур T_1 и T_2 нагревателя и холодильника, но не зависит от устройства машины, а также от вида используемого рабочего вещества.

Последнее обстоятельство является важным, поскольку дает возможность построить рациональную температурную шкалу, не зависящую от выбора термометрического тела и устройства термометра (абсолютная температурная шкала).

Примеры решения задач

Задача 1.

При изотермическом расширении в машине Карно газ совершил работу $A_{12} = 392,4$ Дж (см. Рис. 6.3.1). Вычислить работу A , совершенную газом за один цикл, если температура нагревателя $T_1 = 127^\circ\text{C}$, а температура холодильника $T_2 = 2^\circ\text{C}$.

Решение:

Тепловая машина, работающая по циклу Карно, совершает за один цикл работу: $A = Q_1 - Q_2$. Здесь Q_1 – количество тепла, полученное от нагревателя, Q_2 – количество тепла, отданное холодильнику.

Коэффициент полезного действия цикла Карно определяется формулой (6.3.7):

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{A}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}. \quad (6.3.8)$$

Следовательно, из (6.3.8) получим выражение для работы газа:

$$A = Q_1 \cdot \frac{T_1 - T_2}{T_1}. \quad (6.3.9)$$

В ходе изотермического процесса $T = \text{Const}$ и $dT = 0$. Тогда, согласно (6.2.6), внутренняя энергия меняться не будет $\Delta U = 0$, и все сообщенное газу тепло Q_1 , согласно первому началу термодинамики (6.2.3), идет на совершение им работы A_{12} . Тогда для вычисления полной работы (6.3.9) за цикл окончательно получим:

$$A = A_{12} \cdot \frac{T_1 - T_2}{T_1} = 122,6 \text{ Дж}.$$

Ответ: $A = 122,6$ Дж.

Задача 2.

Найти изменение энтропии ΔS азота массой $m = 28$ г при изобарическом расширении от объема $V_1 = 10$ л до объема $V_2 = 25$ л. Молярная масса азота $\mu = 28 \cdot 10^{-3}$ кг / моль.

Решение:

Изменение энтропии определяется формулой (6.3.4):

$$\Delta S = \int_1^2 \frac{\delta Q}{T}. \quad (6.3.10)$$

По первому закону термодинамики (6.2.3) $dQ = dU + dA$. Учитывая (6.2.1) и (6.2.8), получим:

$$\delta Q = C_v dT + PdV. \quad (6.3.11)$$

Из уравнения Клапейрона – Менделеева (6.1.2.) следует:

$$P = \frac{m}{\mu V} RT. \quad (6.3.12)$$

Теплоемкость ν молей газа при постоянном объеме равна (см. (6.2.15)):

$$C_v = \frac{m}{\mu} \frac{i}{2} R. \quad (6.3.13)$$

Тогда, подставляя (6.3.12) и (6.3.13) в (6.3.11), получим:

$$\delta Q = \frac{m}{\mu} \frac{i}{2} R dT + \frac{m}{\mu} RT \frac{dV}{V}. \quad (6.3.14)$$

Подставляя эту сумму в выражение для изменения энтропии (6.3.4), получаем:

$$\Delta S = \int_{T_1}^{T_2} \frac{i}{2} \frac{m}{\mu} R \frac{dT}{T} + \int_{V_1}^{V_2} \frac{m}{\mu} R \frac{dV}{V} = \frac{i}{2} \frac{m}{\mu} R \int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T} + \frac{m}{\mu} R \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = \frac{i}{2} \frac{m}{\mu} R \ln \left(\frac{T_2}{T_1} \right) + \frac{m}{\mu} R \ln \left(\frac{V_2}{V_1} \right).$$

Так как процесс изобарический, то по закону Гей – Люссака (6.1.5)

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{T_2}{T_1} \text{ и } \ln \left(\frac{V_2}{V_1} \right) = \ln \left(\frac{T_2}{T_1} \right).$$

Поэтому:

$$\Delta S = \frac{(i+2)}{2} \frac{m}{\mu} R \ln \left(\frac{V_2}{V_1} \right).$$

Поскольку газ двухатомный, то $i = 5$ и, подставляя значения из условия, получим: $\Delta S = 26,65 \text{ Дж/град}$.

Ответ: $\Delta S = 26,65 \text{ Дж/град}$.

Задачи

- 6.3.01 Идеальная тепловая машина, работающая по циклу Карно, за каждый цикл получает от нагревателя количество теплоты $Q_1 = 600 \text{ кал}$. Температура нагревателя $T_1 = 400 \text{ К}$, температура холодильника $T_2 = 300 \text{ К}$. Найти работу A , совершаемую машиной, и количество теплоты Q_2 , отдаваемого холодильнику за один цикл. ($1 \text{ кал} = 4,2 \text{ Дж}$)
- 6.3.02 Идеальная тепловая машина работает по циклу Карно. Определить К.П.Д. η цикла, если известно, что за один цикл была произведена работа $A = 300 \text{ Дж}$ и холодильнику передано количество теплоты $Q_1 = 3,2 \text{ ккал}$ ($1 \text{ ккал} = 4,2 \text{ Дж}$).
- 6.3.03 Тепловая машина работает по циклу Карно. Температура нагревателя $T_1 = 500 \text{ К}$. Определить К.П.Д. η цикла и температуру T_2 холодильника, если за счет полученного от нагревателя количества теплоты $Q_1 = 1 \text{ кДж}$ машина совершает работу $A = 350 \text{ Дж}$.
- 6.3.04 Газ, совершающий цикл Карно, отдал холодильнику количество теплоты $Q_2 = 14 \text{ кДж}$. Определить температуру T_1 нагревателя, если при температуре холодильника $T_2 = 280 \text{ К}$ работа газа за полный цикл $A = 10 \text{ Дж}$.
- 6.3.05 Газ, совершающий цикл Карно, получает от нагревателя количество теплоты $Q_1 = 84 \text{ кДж}$. Какую работу A совершает газ за один цикл, если температура нагревателя T_1 в три раза превышает температуру холодильника T_2 ?
- 6.3.06 В результате изохорного нагревания водорода массой $m = 1 \text{ г}$ давление газа P увеличилось в два раза. Определить изменение ΔS энтропии газа.
- 6.3.07 Найти изменение энтропии ΔS при изобарном расширении азота массой $m = 4 \text{ г}$ от объема $V_1 = 5 \text{ л}$ до объема $V_2 = 9 \text{ л}$.

- 6.3.08 Кислород массой $m = 2 \text{ кг}$ увеличил свой объем в $n = 5$ раз один раз изотермически, другой – адиабатно. Найти изменение энтропии ΔS в каждом из указанных процессов.
- 6.3.09 Найти изменение энтропии ΔS при изобарном охлаждении воздуха массой $m = 2 \text{ г}$ от температуры $t_1 = 40^\circ\text{C}$ до $t_2 = 0^\circ\text{C}$.
- 6.3.10 Найти изменение энтропии ΔS при изохорном охлаждении воздуха массой $m = 20 \text{ г}$ от $t_1 = 40^\circ\text{C}$ до $t_2 = 0^\circ\text{C}$.

6.4. СТАТИСТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Теоретический минимум

В основе статистического подхода к описанию термодинамического состояния идеального газа лежат следующие утверждения:

1. Поведение большой совокупности молекул качественно отличается от поведения каждой молекулы в отдельности. Характеристиками такого большого числа частиц (молекул) являются, к примеру, давление, температура, теплопроводность, вязкость. Эти макроскопические характеристики нельзя использовать для описания поведения одной молекулы.
2. Существует количественная связь между свойствами коллектива молекул и средними значениями физических величин, характеризующих поведение каждой молекулы. Например, средняя кинетическая энергия молекулы газа пропорциональна абсолютной температуре T , являющейся свойством большого числа молекул.
3. Свойства коллектива молекул являются макроскопическими свойствами, свойства каждой молекулы – микроскопическими.
4. Статистическая физика оперирует средними значениями величин, характеризующими поведение и свойства каждой молекулы. Поэтому ни направление движения, ни величина скорости каждой молекулы, ни число молекул в каждом малом объеме не играют определяющей роли при вычислении какой-либо макроскопической величины. Например, вычисляя давление газа на стенку, не нужно знать точно, сколько молекул движется в данном направлении. Достаточно исходить из утверждения, что с учетом большого числа молекул и неупорядоченности их движения нет оснований выделять какое – либо направление как преимущественное. В среднем все направления движения молекул равновероятны.

Молекулы газа движутся хаотически. Это движение происходит с

различными скоростями и в различных направлениях. Применяя к хаотическому тепловому движению молекул математический аппарат теории вероятностей, можно получить закон, позволяющий определить распределение молекул по скоростям их движения (распределение Максвелла) в виде:

$$\frac{dN}{N} = f(V)dV = 4\pi \left(\frac{m_0}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} V^2 \exp \left[-\frac{m_0 V^2}{2kT} \right] dV. \quad (6.4.1)$$

Здесь dN – число молекул, скорости которых лежат в интервале от V до $V + dV$; N – полное число молекул, массы которых одинаковы и равны m_0 ; T – температура газа в состоянии теплового равновесия. Это означает, что функция $f(V)$, определенная (6.4.1), дает долю молекул, скорость которых равна V , т. е. имеет смысл вероятности (или распределения) и обладает свойством нормировки:

$$\int_0^{\infty} f(V)dV = 1.$$

Следовательно, распределение молекул по значениям модуля скорости, является распределением по значениям кинетической энергии $E_k = \frac{mV^2}{2}$.

Графически распределение Максвелла представлено на Рис. 6.4.1.

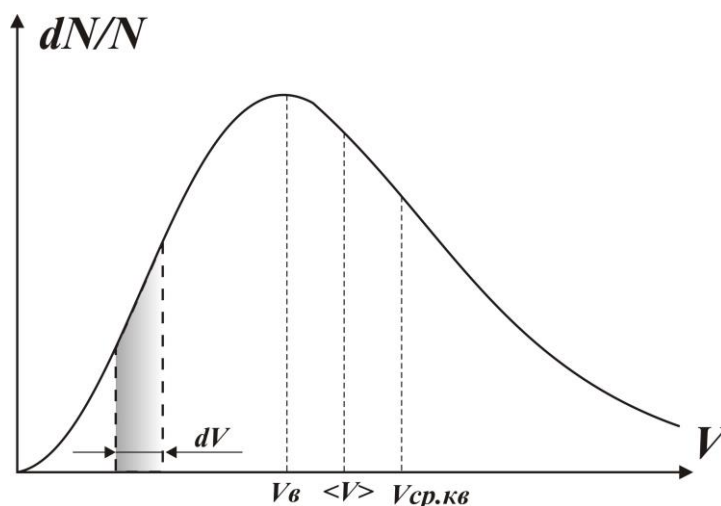


Рис. 6.4.1.

Из формулы (6.4.1) и из Рис. 6.4.1 видно, что существует некоторая скорость $V_в$, с которой движется наибольшее число молекул. Ей отвечает

максимум функции $\frac{dN}{N}$. Такая скорость V_e называется наиболее вероятной.

Приравнявая к нулю производную функции распределения $\frac{df(V)}{dV}$ по скорости V , и решая полученное уравнение, нетрудно получить выражение для наиболее вероятной скорости V_e :

$$V_e = \sqrt{\frac{2kT}{m_0}}. \quad (6.4.2)$$

Большинство молекул движется со скоростями, близкими к наиболее вероятной; процентная доля молекул со скоростями много большими или много меньшими V_e ничтожно мала.

С учетом (6.4.2) распределение Максвелла может быть переписано в виде:

$$\frac{dN}{N} = g(u)du = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \exp[-u^2] u^2 du, \quad (6.4.3)$$

где $u = \frac{V}{V_e}$.

Закон распределения Максвелла позволяет также вычислить среднюю $\langle V \rangle$ (средняя арифметическая) и среднюю квадратичную $V_{\text{ср.кв}} = \sqrt{\langle V^2 \rangle}$ скорости движения молекул:

$$\langle V \rangle = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m_0}}; \quad (6.4.4)$$

$$V_{\text{ср.кв}} = \sqrt{\langle V^2 \rangle} = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}}. \quad (6.4.5)$$

Таким образом, с помощью распределения Максвелла удастся связать средние значения величин, характеризующих поведение молекул газа с макроскопическими характеристиками системы.

Используя понятие распределения молекул в пространстве, можно найти зависимость концентрации молекул от высоты h . Атмосферное давление на какой-либо высоте обусловлено весом вышележащих слоев газа. Вес

вышележащих слоев атмосферы, а следовательно, и давление с высотой h убывают по экспоненциальному закону:

$$P = P_0 \exp\left[-\frac{m_0 gh}{kT}\right], \quad (6.4.6)$$

где P_0 и P – давления на нулевой высоте и высоте h , соответственно. Формула (6.4.6) называется барометрической. Из нее следует, что давление убывает с высотой тем быстрее, чем тяжелее газ и чем ниже температура.

Перейдем от давления P к концентрации n , используя связь между ними (6.1.3):

$$n = n_0 \exp\left[-\frac{m_0 gh}{kT}\right], \quad (6.4.7)$$

из которой следует, что с понижением температуры число частиц на высотах, отличных от нуля убывает, стремясь к нулю при $T = 0$. При высоких температурах, напротив, концентрация слабо убывает с высотой, так что молекулы оказываются распределенными по высоте почти равномерно. Этот факт объясняется действием двух тенденций: с одной стороны – притяжение молекул к Земле (с силой $m_0 g$) стремится расположить молекулы на поверхности Земли; с другой стороны – тепловое движение (характеризуемое величиной kT) стремится разбросать молекулы равномерно по всем высотам.

На разной высоте молекула обладает различным запасом потенциальной энергии: $E_p = m_0 gh$. Следовательно, распределение молекул по высоте является вместе с тем и распределением по значениям потенциальной энергии:

$$n = n_0 \exp\left[-\frac{E_p}{kT}\right]. \quad (6.4.8)$$

Из (6.4.8) следует, что молекулы располагаются с большей плотностью там, где меньше всего их потенциальная энергия, и наоборот, с меньшей плотностью – в местах, где их потенциальная энергия больше.

Распределение (6.4.8) справедливо не только в случае потенциального поля сил земного тяготения, но и в любом потенциальном поле сил для совокупности любых одинаковых частиц, находящихся в состоянии

хаотического теплового движения. Соотношение (6.4.8) называют распределением Больцмана.

Примеры решения задач

Задача 1.

Какая часть молекул идеального газа имеет скорости, отличные от $\frac{V_g}{\sqrt{2}}$ (V_g – наиболее вероятная скорость) не более чем на 1 % ?

Решение:

Воспользуемся законом распределения Максвелла, записанным в виде

(6.4.3): $\frac{\Delta N}{N} = \int_{u_1}^{u_2} g(u) du = \int_{u_1}^{u_2} \frac{4}{\sqrt{\pi}} \exp[-u^2] du$. Здесь $u = \frac{V}{V_g} = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Так как интервал

скоростей мал $\Delta u = 0,02$, то функция распределения $g(u)$ в (6.4.3) почти постоянна $g(u_1) \approx g(u_2) \approx g(u)$. Будем считать ее константой и вынесем за знак интеграла. При этом получим:

$$\frac{\Delta N}{N} \approx g(u) \Delta u = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \exp[-u^2] u^2 \Delta u = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\right] \frac{1}{2} \Delta u \approx 1,4 \cdot 10^{-2}.$$

Ответ: $\frac{\Delta N}{N} \approx 1,4 \cdot 10^{-2}$.

Задача 2.

На какой высоте h над уровнем моря концентрация воздуха n уменьшается в два раза? Молярная масса воздуха равна $\mu = 29$ кг/кмоль. Считать, что температура воздуха не зависит от высоты и равна $t = 0^\circ\text{C}$.

Решение:

Распределение молекул по высоте определяется распределением Больцмана (6.4.7):

$$n = n_0 \exp\left[-\frac{E_p}{kT}\right] = n_0 \exp\left[-\frac{\mu gh}{RT}\right], \text{ где в нашем случае } \frac{n_0}{n} = 2.$$

$$\text{Тогда: } 2 = \exp\left[\frac{\mu gh}{RT}\right] \Rightarrow \ln 2 = \frac{\mu gh}{RT} \Rightarrow h = \frac{\ln 2 RT}{\mu g} = 5,5 \text{ км.}$$

Ответ: $h = 5,5$ км.

Задачи

- 6.4.01 В сосуде находится 2,5 г кислорода. Найти число молекул кислорода, скорости которых превышают среднюю квадратичную скорость.
- 6.4.02 Определить изменение показаний барометра ΔP при подъеме его на телевизионную башню высотой $h = 150$ м. Считать, что на поверхности земли ($h = 0$) давление и температура воздуха равны соответственно $P_0 = 105$ кПа и $t = 15$ °С. Изменением температуры с высотой пренебречь.
- 6.4.03 Барометр в кабине летящего вертолета показывает давление $P = 90$ кПа. На какой высоте h летит вертолет, если на взлетной площадке барометр показывал давление $P_0 = 100$ кПа? Считать, что температура воздуха не зависит от высоты и равна $T = 290$ К.
- 6.4.04 Пылинки, взвешенные в воздухе, имеют массу $m_0 = 10^{-18}$ г. Во сколько раз уменьшится их концентрация n при увеличении высоты на $\Delta h = 10$ м? Считать, что температура не зависит от высоты и равна $T = 300$ К.
- 6.4.05 На какой высоте концентрация атмосферного кислорода n в два раза меньше его концентрации газа на уровне моря n_0 ? Считать, что температура кислорода не зависит от высоты и равна $t = 7$ °С.
- 6.4.06 Какая часть молекул идеального газа имеет скорости, отличные от $V_g/2$ не более чем на 1 % (V_g – наиболее вероятная скорость)?
- 6.4.07 Какая часть молекул идеального газа имеет скорости, отличные от $2V_g$ не более чем на 1 % (V_g – наиболее вероятная скорость)?
- 6.4.08 Какая часть молекул идеального газа имеет скорости, отличные от $\sqrt{2}V_g$ не более чем на 1 % (V_g – наиболее вероятная скорость)?
- 6.4.09 При какой температуре T средняя квадратичная скорость $V_{\text{ср.кв}}$

молекул азота на $\Delta V = 50$ м/с больше их наиболее вероятной скорости V_{θ} ?

- 6.4.10 Найти среднюю арифметическую $\langle V \rangle$, среднюю квадратичную $V_{\text{ср.кв}}$ и наиболее вероятную V_{θ} скорости молекул газа, который при давлении $P = 40$ кПа имеет плотность $\rho = 0,3$ кг/м³.

6.5. ЯВЛЕНИЯ ПЕРЕНОСА

Теоретический минимум

Молекулы газа в процессе своего хаотического движения постоянно испытывают соударения не только со стенками сосуда, но и друг с другом. Длиной свободного пробега l называют длину пути, пройденного молекулой между двумя последовательными соударениями. Так как молекулы распределены в пространстве беспорядочно, движутся во всевозможных направлениях и с различными скоростями, то величина l окажется разной для разных молекул. Однако можно найти среднее значение длины свободного пробега $\langle l \rangle$ молекулы газа для большого числа столкновений и пользоваться этим параметром для характеристики состояния газа.

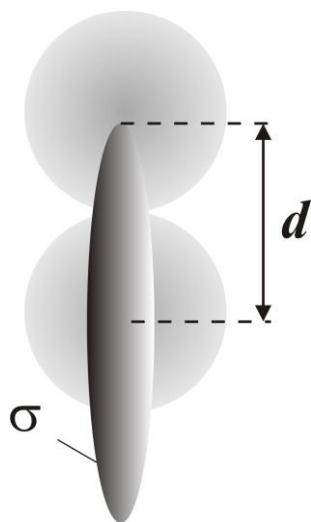


Рис. 6.5.1.

Предположим, что молекулы газа при столкновении ведут себя как упругие шарики, отталкивающиеся только при соприкосновении, когда расстояние между их центрами равно удвоенному радиусу молекулы: $d = 2r$. Пусть молекула движется со скоростью, равной средней скорости $\langle V \rangle$. Тогда за интервал времени t соударения с ней испытают молекулы, центры которых оказываются внутри цилиндра, длина образующей которого равна $L = \langle V \rangle t$, а площадь основания σ имеет радиус, равный $d = 2r$ (см. Рис. 6.5.1). Площадь $\sigma = 4\pi r^2$ называется эффективным сечением соударения.

Если считать остальные молекулы неподвижными, то среднее число соударений $\langle Z \rangle$, испытываемых молекулой за время t можно определить как произведение объема цилиндра $\sigma \langle V \rangle t$ на концентрацию молекул газа n . Пусть $t = 1$ с, тогда среднее число соударений молекулы в единицу времени будет равно:

$$\langle Z \rangle = \sigma \langle V \rangle n. \quad (6.5.1)$$

Разделив путь, пройденный молекулой за $t = 1$ с на число столкновений $\langle Z \rangle$, испытанных ею за то же время, получим среднюю длину свободного пробега $\langle l \rangle$:

$$\langle l \rangle = \frac{L}{\langle Z \rangle} = \frac{\langle V \rangle}{\sigma \langle V \rangle n} = \frac{1}{\sigma n}. \quad (6.5.2)$$

Однако эти формулы нужно скорректировать. При их выводе мы сделали ряд искусственных допущений. Так в действительности, все молекулы движутся, и результат столкновения двух частиц зависит от средней скорости их относительного движения, которая в $\sqrt{2}$ раз больше, чем $\langle V \rangle$. С учетом этого обстоятельства:

$$\langle Z \rangle = \sqrt{2} \sigma \langle V \rangle n, \quad (6.5.3)$$

$$\langle l \rangle = \frac{1}{\sqrt{2} \sigma n}. \quad (6.5.4)$$

Причиной возникновения всех явлений переноса является нарушение равновесия в системе. Система при этом всегда стремится вернуться в равновесное состояние. Такие процессы сопровождаются ростом энтропии. Следовательно, они необратимы. В ходе восстановления равновесия в телах возникают потоки тепла, массы, импульса и т.д. Поэтому соответствующие процессы носят название явлений переноса. Мы рассмотрим три явления переноса – вязкость, теплопроводность и диффузию.

Потоком называется количество какой-либо величины, проходящее в единицу времени через единичную поверхность, ориентированную перпендикулярно направлению переноса. Поток – векторная величина, направление которой указывает направление, в котором осуществляется

перенос вещества, энергии, импульса и т.д.

1. Перенос энергии (Теплопроводность).

Теплопроводность – один из видов переноса теплоты (энергии) от более нагретых частей тела к менее нагретым, приводящий к выравниванию температуры.

Допустим, что в некоторой среде вдоль некоей оси Z существует градиент температуры $\frac{dT}{dz}$ (см. Рис. 6.5.2).

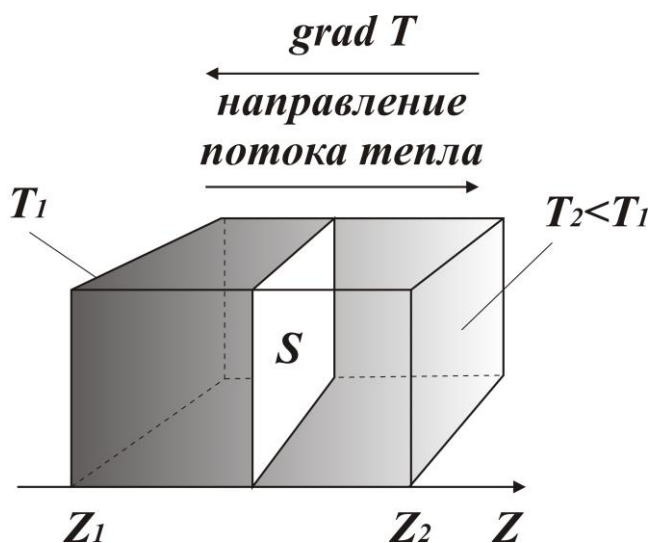


Рис. 6.5.2.

Введем понятие плотности теплового потока \dot{j}_Q как количества теплоты, переданного в единицу времени через единичную поверхность, ориентированную перпендикулярно вектору градиента температуры. Размерность величины \dot{j}_Q в системе СИ будет $Вт / м^2$.

Если относительное изменение температуры T на расстоянии средней длины свободного пробега частиц мало, то выполняется эмпирический закон Фурье, согласно которому плотность теплового потока \dot{j}_Q пропорциональна

градиенту температуры $\frac{dT}{dz}$:

$$j_Q = -\lambda \frac{dT}{dz}. \quad (6.5.5)$$

Коэффициент пропорциональности λ зависит от свойств среды и

называется коэффициентом теплопроводности. Можно показать, что:

$$\lambda = \frac{1}{3} \rho \cdot \langle V \rangle \cdot \langle l \rangle \cdot C_p, \quad (6.5.6)$$

где ρ – плотность, C_p – удельная теплоемкость газа. Если размерность потока тепла \dot{J}_Q в системе СИ – это $\text{Вт}/\text{м}^2$, то размерность коэффициента теплопроводности будет $\text{Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})$.

Знак “–” в формуле (6.5.5) отражает тот факт, что тепло передается от более нагретых частей тела к менее нагретым.

2. Перенос вещества (Диффузия).

Диффузия – неравновесный процесс, вызываемый молекулярным тепловым движением и приводящий к выравниванию концентраций внутри каждой фазы вещества.

Так, если создать градиент концентрации молекул $\frac{dn}{dz}$ в направлении некоей оси Z , то, вследствие теплового движения молекул, возникнет их поток \dot{J}_n через перпендикулярную этой оси поверхность (см. Рис. 6.5.3).

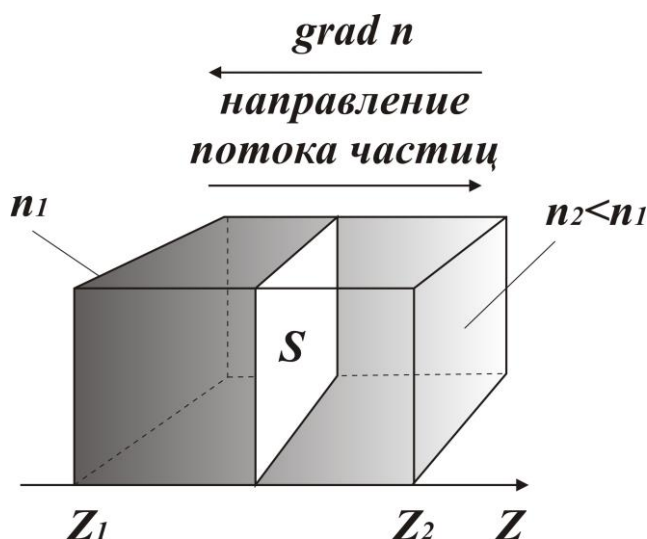


Рис. 6.5.3.

Под потоком \dot{J}_n в данном случае следует понимать число частиц, прошедших в единицу времени через поверхность (единичной площади), ориентированную перпендикулярно оси Z . Размерность величины \dot{J}_n в системе СИ будет $(\text{с} \cdot \text{м}^2)^{-1}$. Согласно эмпирическому закону Фика:

$$j_n = -D \frac{dn}{dz}. \quad (6.5.7)$$

Поток прямо пропорционален градиенту концентрации с коэффициентом пропорциональности D , который зависит от свойств вещества и называется коэффициентом диффузии. Можно показать, что:

$$D = \frac{1}{3} \langle V \rangle \cdot \langle l \rangle. \quad (6.5.8)$$

Размерность коэффициента диффузии в системе СИ – m^2 / c .

Знак “–” в формуле (6.5.7) указывает на то, что поток молекул в ходе диффузии будет направлен в сторону убывания концентрации.

3. Перенос импульса.

Рассмотрим газ или жидкость, которые находятся с одной стороны от бесконечной плоской поверхности и занимают полупространство $Z > 0$ (см. Рис. 6.5.4).

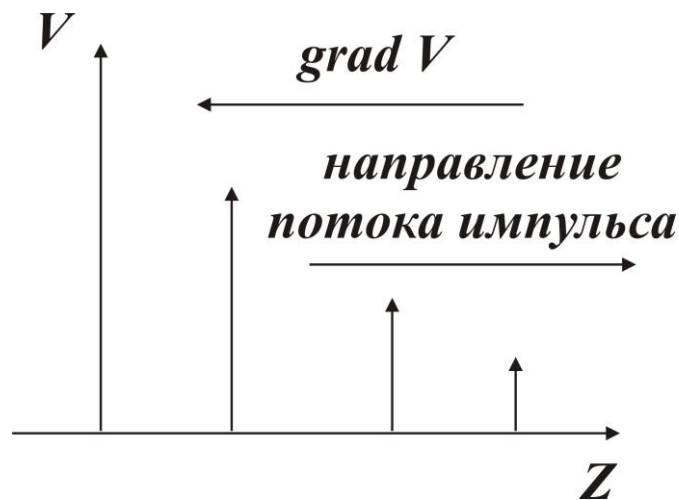


Рис. 6.5.4.

Допустим, поверхность движется со скоростью, которая лежит в плоскости поверхности и равна V . Частицы газа или жидкости, примыкающие к поверхности, будут вовлечены в движение силами притяжения к частицам поверхности. Поэтому возникнет течение граничащего с поверхностью слоя жидкости. Его скорость будет также равна V . По мере удаления от поверхности (с ростом Z) скорость течения будет убывать, обращаясь в нуль при $Z \rightarrow \infty$. Это означает, что скорость течения является убывающей функцией $V = V(z)$ расстояния до поверхности, и перенос импульса будет осуществляться в

направлении оси Z . Размерность плотности потока импульса (обозначаемого буквой j_p) совпадает с размерностью силы действующей на единицу площади соприкосновения поверхностей. Размерность j_p в системе СИ будет $кг / (с^2 \cdot м)$.

Так же как и при диффузии и теплопроводности, поток импульса зависит от скорости изменения в пространстве скорости течения, и в одномерном случае (Рис. 6.5.4) эта зависимость имеет вид:

$$j_p = -\eta_p \frac{dV}{dz}. \quad (6.5.9)$$

Выражение (6.5.9) известно как закон Ньютона для внутреннего трения. Знак “-” в формуле (6.5.9) указывает на то, что перенос импульса происходит в направлении убывания скорости V .

Коэффициент η_p называется динамической вязкостью среды. Можно показать, что он равен:

$$\eta_p = \frac{1}{3} \rho \cdot \langle V \rangle \cdot \langle l \rangle, \quad (6.5.10)$$

где ρ – плотность. Коэффициент η_p является положительной величиной, характеризующей скорость переноса импульса в результате теплового движения, и определяется свойствами среды. Единицей его измерения в системе СИ служит $кг / с \cdot м$, а в системе СГС – пуаз (Пз), равный $г / с \cdot см$. Так, например, динамическая вязкость дистиллированной воды равна 1 сПз (т. е. $0,01 \text{ Пз}$).

Импульс единицы объема газа или жидкости равен произведению плотности ρ на скорость его перемещения. Поэтому помимо потока импульса рассматривают еще поток скорости течения, определяя его так:

$$j_v = \frac{j_p}{\rho} = -\nu_v \frac{dV}{dz}. \quad (6.5.11)$$

Коэффициент $\nu_v = \frac{\eta_p}{\rho}$ называется кинематической вязкостью. Единицей его измерения в системе СИ служит $м^2/с$, а в системе СГС – стокс (Ст), равный $см^2/с$.

Примеры решения задач

Задача 1.

При температуре $t = 0^\circ\text{C}$ и некотором давлении P_1 средняя длина свободного пробега молекул кислорода равна $\langle l \rangle_1 = 9,5 \cdot 10^{-8}$ м. Чему равно среднее число столкновений в 1 с $\langle Z \rangle_2$, если сосуд откачать до давления $P_2 = 0,01 \cdot P_1$? Температура остается неизменной. Молярная масса кислорода равна $\mu = 32$ кг/кмоль.

Решение:

Совместное применение формул (6.5.3) – (6.5.4) дает нам для среднего числа столкновений в 1 с выражение $\langle Z \rangle_2 = \langle V \rangle / \langle l \rangle_2$, где $\langle V \rangle$ - средняя скорость движения молекул (см. формулу (6.4.4)), а $\langle l \rangle_2$ – средняя длина свободного пробега при давлении P_2 , (см. формулу (6.5.4)). Из уравнения состояния идеального газа в виде (6.1.3) имеем $n = P/kT$. Тогда для давлений P_1 и P_2 средние длины свободного пробега будут равны соответственно:

$$\langle l \rangle_1 = \frac{kT}{\sqrt{2}\sigma P_1} \text{ и } \langle l \rangle_2 = \frac{kT}{\sqrt{2}\sigma P_2}. \quad (6.5.12)$$

$$\text{Значит: } \langle l \rangle_2 = \frac{P_1}{P_2} \langle l \rangle_1.$$

Окончательно получим:

$$\langle Z \rangle_2 = \frac{1}{\langle l \rangle_1} \frac{P_2}{P_1} \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}} = 4,5 \cdot 10^7 \text{ с}^{-1}.$$

$$\text{Ответ: } \langle Z \rangle_2 = 4,5 \cdot 10^7 \text{ с}^{-1}.$$

Задача 2.

Эффективный диаметр молекулы азота равен $d = 3,1 \cdot 10^{-10}$ м. Чему равны коэффициенты диффузии D и динамической вязкости η азота при нормальных условиях?

Решение:

Молярная масса азота $M = 28 \cdot 10^{-3}$ кг/моль. Нормальные условия:
 $T = 273$ К, $P = 10^5$ Па.

Коэффициент динамической вязкости $\eta = \frac{1}{3} \rho \cdot \langle V \rangle \cdot \langle l \rangle$ (6.5.10).

Коэффициент диффузии $D = \frac{1}{3} \langle V \rangle \cdot \langle l \rangle$ (6.5.7). Задача сводится к отысканию $\langle V \rangle, \langle l \rangle$ и ρ .

Средняя скорость движения молекул $\langle V \rangle = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m_0}} = 457$ м/с. Средняя

длина свободного пробега $\langle l \rangle = \frac{1}{\sqrt{2} \sigma n} = \frac{kT}{\sqrt{2} \pi d^2 P} = 8,72 \cdot 10^{-8}$ м. Плотность

$\rho = \frac{m}{V}$. Учитывая, что $PV = \frac{m}{M} RT$, получим: $\rho = \frac{PM}{RT} = 1,25$ кг/м³. Теперь

подставим эти результаты в формулы для η и D и получим $\eta = 16,6 \cdot 10^{-6}$ (кг/с·м); $D = 1358 \cdot 10^{-8}$ (м²/с).

Ответ: $\eta = 16,6 \cdot 10^{-6}$ (кг/с·м); $D = 1358 \cdot 10^{-8}$ (м²/с).

Задачи

- 6.5.01 Средняя длина свободного пробега $\langle l \rangle$ атомов гелия при нормальных условиях равна 180 нм. Определить коэффициент диффузии D гелия.
- 6.5.02 Коэффициент диффузии D кислорода при температуре $T = 273$ К равен 0,19 см²/с. Определить среднюю длину свободного пробега $\langle l \rangle$ молекул кислорода.
- 6.5.03 Найти вязкость η азота при нормальных условиях, если коэффициент диффузии для него равен $D = 1,42 \cdot 10^{-5}$ м²/с.
- 6.5.04 Найти среднюю длину свободного пробега $\langle l \rangle$ атомов гелия при давлении $P = 101,3$ кПа и температуре $t = 0$ °С, если вязкость гелия $\eta = 1,3 \cdot 10^{-5}$ кг/(с·м).
- 6.5.05 Найти коэффициент диффузии D и вязкость η воздуха при

давлении $P = 101,3 \text{ кПа}$ и температуре $t = 10^\circ\text{C}$. Диаметр молекул принять равным $d = 0,3 \text{ нм}$.

- 6.5.06 В колбе объемом $V = 100 \text{ см}^3$ находится $m = 0,5 \text{ г}$ азота. Найти среднюю длину свободного пробега $\langle l \rangle$ молекул азота при этих условиях. Диаметр молекул принять равным $d = 3 \cdot 10^{-8} \text{ см}$.
- 6.5.07 Найти среднюю длину свободного пробега $\langle l \rangle$ атомов гелия в условиях, когда его плотность равна $\rho = 2,1 \cdot 10^{-2} \text{ кг/см}^3$. Диаметр атомов гелия принять равным $d = 2 \cdot 10^{-8} \text{ см}$.
- 6.5.08 При нормальном атмосферном давлении средняя длина свободного пробега молекул азота была равна $\langle l \rangle = 6 \cdot 10^{-6} \text{ см}$. Найти давление P , при котором средняя длина свободного пробега молекул азота станет равной $\langle l \rangle = 1 \text{ мм}$? Считать, что температура поддерживалась постоянной.
- 6.5.09 Найти среднее число соударений в единицу времени $\langle Z \rangle$ и среднюю длину свободного пробега $\langle l \rangle$ для молекулы гелия при давлении $P = 2 \text{ кПа}$ и температуре $T = 200 \text{ К}$. Диаметр атомов гелия принять равным $d = 2 \cdot 10^{-8} \text{ см}$.
- 6.5.10 Подсчитать среднее число соударений в единицу времени $\langle Z \rangle$, испытываемых молекулой аргона при температуре $T = 290 \text{ К}$ и давлении $P = 0,1 \text{ мм. рт. ст.}$. Диаметр атомов аргона принять равным $d = 2,9 \cdot 10^{-10} \text{ м}$. (Учесть, что $760 \text{ мм. рт. ст.} = 10^5 \text{ Па}$).

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА №6

Студент должен решить 5 задач того варианта, номер которого совпадает с последней цифрой шифра зачетной книжки студента.

Вариант	Номер задачи				
1	6.1.01	6.2.01	6.3.01	6.4.01	6.5.01
2	6.1.02	6.2.02	6.3.02	6.4.02	6.5.02
3	6.1.03	6.2.03	6.3.03	6.4.03	6.5.03
4	6.1.04	6.2.04	6.3.04	6.4.04	6.5.04
5	6.1.05	6.2.05	6.3.05	6.4.05	6.5.05
6	6.1.06	6.2.06	6.3.06	6.4.06	6.5.06
7	6.1.07	6.2.07	6.3.07	6.4.07	6.5.07
8	6.1.08	6.2.08	6.3.08	6.4.08	6.5.08
9	6.1.09	6.2.09	6.3.09	6.4.09	6.5.09
10	6.1.10	6.2.10	6.3.10	6.4.10	6.5.10

ТЕМЫ ПИСЬМЕННЫХ РАБОТ (РЕФЕРАТОВ)

Студент должен представить письменную работу (реферат) по теме, номер которой совпадает с последней цифрой шифра зачетной книжки студента.

- 1) Физические проблемы, приведшие к открытию квантово-механической формы движения.
- 2) Корпускулярно-волновой дуализм.
- 3) Фундаментальный принцип квантовой дополнительности.
Соотношения неопределенностей Гейзенберга.
- 4) Теория атома по Бору. Волновые свойства элементарных частиц.
- 5) Уравнение Шредингера.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ:

1. Савельев И. В. Курс общей физики. В 5 книгах. Книга 5. Квантовая оптика. Атомная физика. Физика твердого тела. Физика атомного ядра и элементарных частиц. – 2005 г.
2. Иродов И. Е. Квантовая физика. Основные законы. – 2006 г.
3. Чертов А. Г., Воробьев А. А. Задачник по физике. – 2001 г.
4. Сена Л. А. Единицы физических величин и их размерности. – 1988 г.