

## Лабораторная работа № 1-19

### ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ МОМЕНТА ИМПУЛЬСА

#### 1. Цель работы.

Изучение закона сохранения момента импульса при вращении твердого тела.

#### 2. Теоретическое введение.

##### 2.1. Вращательное движение абсолютно твердого тела.

Любое сложное движение абсолютно твердого тела (т.е. тела, все точки которого сохраняют неизменное положение относительно друг друга) может быть представлено как сумма простых движений: *поступательного* и *вращательного*.

Рассмотрим твердое тело, которое вращается вокруг неподвижной оси. Тогда все точки такого тела при движении описывают окружности, центры которых лежат на одной прямой, называемой осью вращения (см. рис. 1). Ось вращения может лежать вне тела или проходить сквозь тело.

Линейные скорости и ускорения всех точек твердого тела различны, причем, чем дальше точка отстоит от оси вращения, тем больше величины этих скоростей и ускорений. Поэтому вращение тела характеризуется вектором угловой скорости  $\vec{\omega}$  и вектором углового ускорения  $\vec{\epsilon}$ , величины которых одинаковы для всех точек твердого тела.

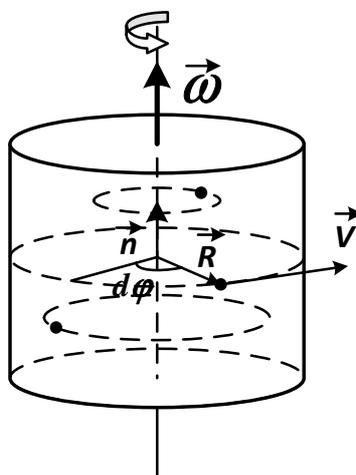


Рис. 1 Вращение твердого тела.

Угловой скоростью  $\vec{\omega}$  называется величина, равная производной от угла поворота по времени

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}.$$

Здесь нужно оговориться, что сам по себе угол не может являться вектором, поэтому всегда подразумевается, что приращение угла  $d\varphi$  равно

$$d\vec{\varphi} = d\varphi \cdot \vec{n},$$

где  $\vec{n}$  – единичный вектор нормали к плоскости вращения, направленный вдоль оси вращения, соответственно.

Угловая скорость вращения связана с линейной скоростью  $\vec{V}$  заданной точки твердого тела по формуле

$$\vec{V} = [\vec{\omega}\vec{R}],$$

где  $\vec{R}$  – радиус-вектор, проведенный из центра вращения к данной точке твердого тела и перпендикулярный оси вращения.

## 2.2. Момент силы.

Причиной, вызывающей вращательное движение тела, является наличие моментов сил, действующих на тело. Пусть точка А (см. рис. 2) принадлежит некоторому твердому телу и является точкой приложения силы  $\vec{F}$ . Моментом  $\vec{M}$  силы  $\vec{F}$  относительно неподвижной произвольной точки О называется физическая величина, определяемая векторным произведением радиуса-вектора  $\vec{r}$ , проведенного из точки О в точку приложения силы, на силу  $\vec{F}$

$$\vec{M} = [\vec{r}\vec{F}].$$

На рисунке точка  $O$  помещена в начало некоторой декартовой системы координат, оси которой расположены так, что радиус-вектор  $\vec{r}$  и вектор приложенной силы  $\vec{F}$  лежат в плоскости  $xOy$ . При этом момент силы  $M$  будет направлен вдоль оси  $z$ .

Модуль момента силы равен

$$M = F \cdot r \cdot \sin \alpha = Fd,$$

где  $\alpha$  - угол между векторами  $\vec{F}$  и  $\vec{r}$ ;  $r \cdot \sin \alpha = d$  - кратчайшее расстояние между линией действия силы и точкой  $O$  - плечо силы.

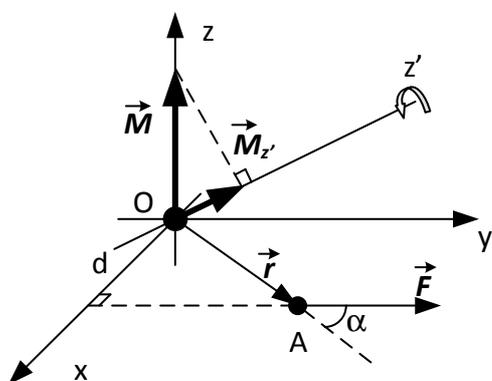


Рис. 2 Момент силы относительно точки и проекция момента силы на выделенную ось.

Моментом силы относительно неподвижной оси  $z'$  называется величина  $\vec{M}_{z'}$ , равная проекции вектора момента силы  $\vec{M}$  на эту ось, заданного относительно произвольной точки  $O$  принадлежащей оси  $z$  (рис.2).

Угловое ускорение твердого тела и результирующий момент сил, действующий на это тело, связаны законом динамики вращательного движения

$$J \cdot \vec{\varepsilon} = \vec{M}.$$

Здесь  $J$  – тензор инерции твердого тела. Если твердое тело вращается относительно неподвижной оси  $z$ , то закон вращательного движения можно записать в скалярной форме

$$J_z \cdot \varepsilon_z = M_z,$$

где  $J_z$  – величина момента инерции относительно оси  $z$ ,  $\varepsilon_z$  – угловое ускорение твердого тела,  $M_z$  – проекция результирующего момента сил на ось  $z$ .

### 2.3. Момент инерции твердого тела.

Инертные свойства твердого тела при вращательном движении определяются физической величиной, называемой моментом инерции. Момент инерции тела относительно оси вращения зависит от величины массы тела, его формы и размеров, а также выбора оси вращения и от распределения массы тела относительно этой оси.

Момент инерции материальной точки равен

$$J = mr^2,$$

где  $r$  – радиус окружности по которой вращается материальная точка. Размерность момента инерции в СИ:  $[I] = \text{кг} \cdot \text{м}^2$ .

Для того, чтобы вычислить момент инерции твердого тела, надо представить тело как совокупность материальных точек с моментами инерции  $dJ = dm \cdot r^2$ . Затем, вычисление момента инерции тела производится путем интегрирования:

$$J = \int r^2 dm = \int_V r^2 \rho dV,$$

где  $\rho$  – плотность вещества в объеме тела  $dV$ , находящегося на расстоянии  $r$  от оси вращения.

### 2.4. Момент импульса твердого тела и материальной точки.

Моментом импульса  $\vec{L}$  материальной точки  $A$  относительно неподвижной (произвольной) точки  $O$  называется физическая величина, определяемая векторным произведением

$$\vec{L} = [\vec{r}\vec{p}],$$

где  $\vec{r}$  – радиус-вектор, проведенный из точки O в точку A,  $\vec{p} = m\vec{V}$  – импульс материальной точки. Модуль вектора момента импульса  $L = r \cdot p \cdot \sin \alpha = mVr \sin \alpha = p \cdot d$ , (2) где  $\alpha$  – угол между векторами  $\vec{r}$  и  $\vec{p}$ ,  $d$  – плечо вектора  $\vec{p}$  относительно точки O (рис.3).

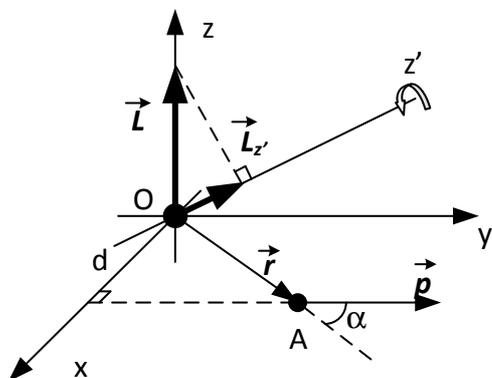


Рис. 3 Момент импульса материальной точки и его проекция на выделенную ось  $z'$ .

Моментом импульса относительно оси  $z$  называется величина  $\vec{L}_z$ , равная проекции на эту ось вектора момента импульса  $\vec{L}$ , определенного относительно произвольной точки O данной оси  $z$ . Значение момента импульса  $\vec{L}_z$  не зависит от положения точки O на оси  $z$ .

При непрерывном распределении массы момент импульса относительно оси  $z$  равен

$$\vec{L}_z = J_z \vec{\omega}_z,$$

где  $J_z$  – момент инерции тела относительно оси  $z$ ,  $\omega_z$  – угловая скорость вращения.

## 2.5. Уравнение моментов.

Момент импульса материальной точки или твердого тела  $\vec{L}$  связан с моментом приложенных сил  $\vec{M}$  следующим соотношением, называемым уравнением моментов

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}.$$

### 2.6. Закон сохранения момента импульса.

Из уравнения моментов следует, что, если результирующий момент сил, действующий на систему материальных точек или твердое тело равен нулю (замкнутая система), то момент импульса такой системы остается постоянным

$$\vec{L} = const.$$

Если тело вращается вокруг закрепленной оси  $z$ , то сохраняется проекция момента импульса тела на эту ось

$$L_z = const.$$

### 3. Описание экспериментальной установки.

Общий вид установки представлен на рис.4.

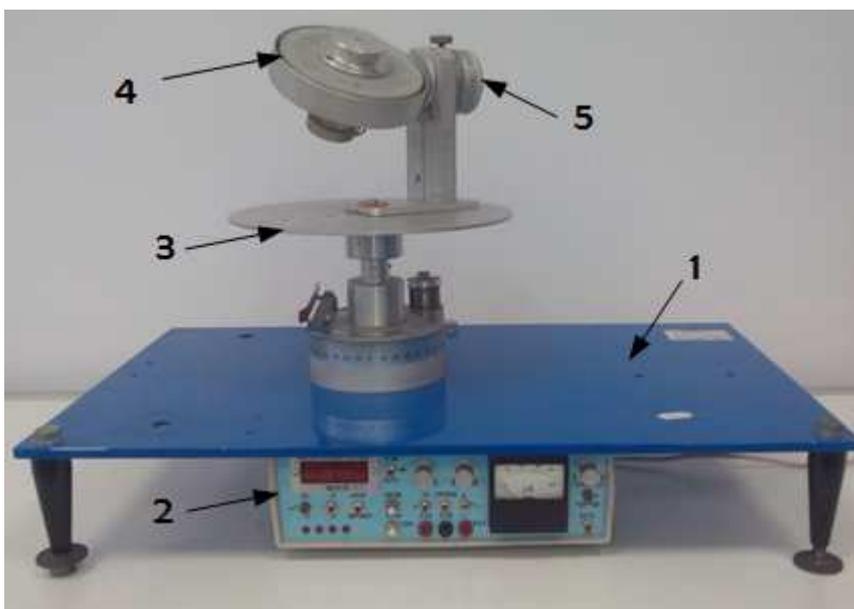


Рис.4. Общий вид экспериментальной установки.

Установка состоит из регулируемого основания 1 с закрепленным на нем электронным блоком регистрации и управления 2 и поворотным столиком 3. Электронный блок позволяет измерять время 1, 2 и 4-х оборотов столика, а также управлять вращением столика и гироскопа. Сверху поворотного столика смонтирован гироскоп 4, приводимый во вращение электродвигателем. С помощью поворотного устройства со шкалой 5 можно изменять угол наклона оси вращения гироскопа к вертикали.

#### 4. Идея эксперимента.

Вначале, при застопоренном поворотном столике гироскоп приводится во вращение с определенной угловой скоростью  $\omega_0$ . Затем, стопор поворотного столика отпускают и мгновенно останавливают гироскоп. При этом столик вместе с гироскопом начинает вращаться. С помощью блока управления измеряют время первого оборота столика с момента остановки гироскопа.

По закону сохранения импульса

$$J_{\text{гир}}\omega_0 \cos \alpha = (J_{\text{стол}} + J_{\text{гир}})\omega,$$

здесь  $J_{\text{гир}}$  – момент инерции гироскопа,  $\omega_0$  – угловая скорость вращения гироскопа,  $\alpha$  – угол наклона оси гироскопа к вертикали,  $J_{\text{стол}}$  – момент инерции поворотного столика,  $\omega = \frac{2\pi}{T}$  – угловая скорость вращения столика с заторможенным гироскопом,  $T$  – время одного оборота столика. Перепишем это соотношение в виде пропорции

$$\frac{\omega_0 \cos \alpha}{\omega} = \frac{(J_{\text{стол}} + J_{\text{гир}})}{J_{\text{гир}}} = \text{const.}$$

Видно, что правая часть этого соотношения представляет собой постоянную величину. Поэтому, если построить график зависимости  $\omega$  от произведения  $\omega_0 \cos \alpha$ , то он будет представлять собой прямую линию, что и будет являться подтверждением выполнения закона сохранения импульса при вращении твердого тела.

## 5. Порядок проведения эксперимента.

### 5.1 Настройки электронного секундомера

Перед выполнением измерений проверьте положение тумблеров электронного секундомера (см. фото)



Тумблер 1 должен находиться в нижнем положении. Он определяет выбор канала системы регистрации.

Тумблер 2 должен находиться в среднем положении. Здесь происходит выбор измерения времени 1, 2-х или 4-х оборотов поворотного столика.

Тумблер 3 должен находиться в нижнем положении. Он определяет выбор между однократным и многократным измерением времени. При многократном измерении система будет выдавать значение времени через каждый оборот столика.

Кнопка 4 – сброс показаний секундомера и одновременный запуск считывания датчика поворота столика. Кнопка нажимается каждый раз перед торможением гироскопа.

Тумблер 5 – рекомендуется выставить в среднее положение. При этом на индикаторе будет выводиться значение времени в миллисекундах.

### 5.2 Управление гироскопом

Блок управления гироскопом показан на фото.



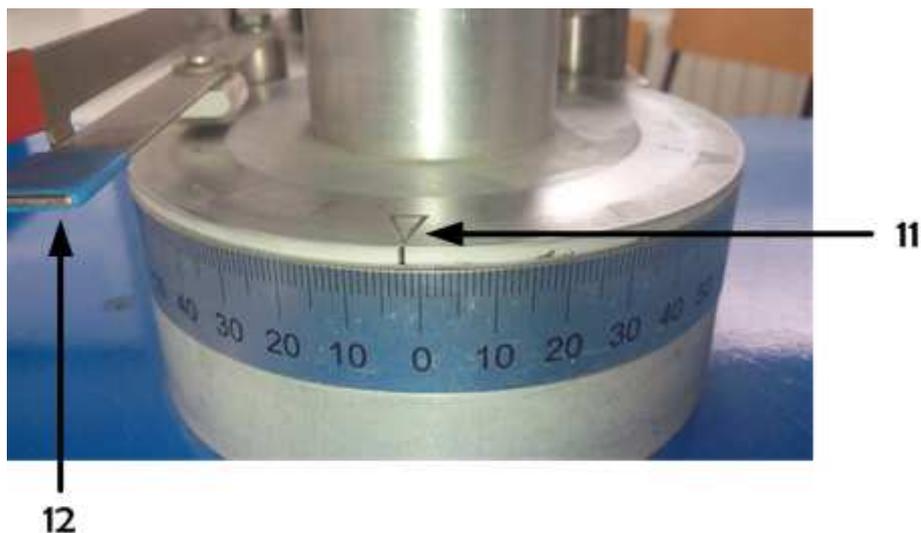
Стрелочный прибор 6 показывает ЧАСТОТУ ВРАЩЕНИЯ ГИРОСКОПА в Гц. Потенциометр 7 позволяет регулировать частоту вращения гироскопа в пределах от 0 до 50 Гц. Тумблер 8 в среднем положении обесточивает двигатель гироскопа, в верхнем – запускает гироскоп, а в нижнем – резко тормозит вращение диска гироскопа.

### 5.3 Порядок проведения измерений

1. Выставить угол наклона оси гироскопа к вертикали в соответствии с индивидуальным заданием с помощью поворотного устройства 9 и закрепить винтом 10.



2. Выставить треугольную метку 11 на поворотном столике как показано на фото и опустить вниз рычажок тормоза 12, который не позволит вращаться столику во время разгона гироскопа.



3. Перевести потенциометр 7 в крайнее левое положение.
4. Включить гироскоп тумблером 8, переведя его из среднего в верхнее положение.
5. МЕДЛЕННО поворачивать потенциометр 7 до установления на стрелочном приборе 6 нужного значения частоты  $\nu_0$  вращения гироскопа.
6. Нажать кнопку СБРОС на электронном секундомере.
7. Отпустить тормоз поворотного столика 12, нажав на красный рычажок.
8. Резко перевести тумблер управления гироскопом 8 в нижнее положение. При этом гироскоп затормозится, а столик придёт во вращение.
9. Запишите измеренное секундомером время оборота столика в таблицу 1 или таблицу 2 в соответствии с индивидуальным заданием.
10. Для каждого значения частоты вращения гироскопа или для каждого значения угла наклона оси гироскопа измерения времени вращения столика проделать по 5 раз.
11. Рассчитайте погрешности измерения частоты вращения столика и нанесите эти погрешности на график в соответствии с индивидуальным заданием.

Таблица 1. Угол наклона оси гироскопа к вертикали  $\alpha =$ 

$v_0, \Gamma y$	$T_i, c$	$v_i = \frac{1}{T_i}, \Gamma y$	$\langle v \rangle, \Gamma y$	$\Delta v_i =  \langle v \rangle - v_i $		$\langle \Delta v \rangle, \Gamma y$
10	1. 2. 3. 4. 5.					
15	1. 2. 3. 4. 5.					
20	1. 2. 3. 4. 5.					
25	1. 2. 3. 4. 5.					
30	1. 2. 3. 4. 5.					
35	1. 2. 3. 4. 5.					
40	1. 2. 3. 4. 5.					
45	1. 2. 3. 4. 5.					

Таблица 2. Частота вращения гироскопа  $\nu_0 =$ 

$\alpha$	$T_i, c$	$\nu_i = \frac{1}{T_i}, Гц$	$\langle \nu \rangle, Гц$	$\Delta \nu_i =  \langle \nu \rangle - \nu_i $	$\langle \Delta \nu \rangle, Гц$
0°	1. 2. 3. 4. 5.				
10°	1. 2. 3. 4. 5.				
20°	1. 2. 3. 4. 5.				
30 °	1. 2. 3. 4. 5.				
40°	1. 2. 3. 4. 5.				
50	1. 2. 3. 4. 5.				
60	1. 2. 3. 4. 5.				
70	1. 2. 3. 4. 5.				

## 6. Библиографический список.

1. *Савельев И.В.* Курс общей физики. Кн.1- М.: АСТ Астрель. 2006.
2. *Капуткин Д.Е., Шустиков А.Г.* Физика. Обработка результатов измерений при выполнении лабораторных работ. (№ 805). М.: МИСиС. «Учеба». 2007.-108с.

## 7. Контрольные вопросы.

1. Что называется вращательным движением твердого тела?
2. Как записывается основное уравнение динамики вращательного движения твердого тела вокруг неподвижной оси?
3. Что такое момент импульса твердого тела и материальной точки? От чего он зависит?
4. Как связаны момент импульса и момент силы?
5. В чем состоит закон сохранения момента импульса?

## 8. Индивидуальные задания.

### Задание 1.

1. Из определения момента сил, действующего на твердое тело и момента импульса этого тела, получите уравнение моментов.
2. Произведите серию измерений периода вращения столика с гироскопом при угле наклона оси гироскопа к вертикали  $\alpha = 30^\circ$ . Результаты эксперимента занесите в таблицу 1. Рассчитайте погрешности определения частоты вращения столика.
3. Постройте и проанализируйте график зависимости частоты вращения столика  $\nu$  от частоты вращения гироскопа  $\nu_0$ . Нанесите рассчитанные погрешности в виде интервалов на график.

### Задание 2.

1. Выведите формулу для момента импульса твердого тела через момент инерции и угловую скорость.

2. Произведите серию измерений периода вращения столика с гироскопом в зависимости от угла наклона оси гироскопа при постоянной частоте вращения гироскопа  $\nu_0 = 20$  Гц. Результаты эксперимента занесите в таблицу 2. Рассчитайте погрешности определения частоты вращения столика.

3. Постройте и проанализируйте график зависимости частоты вращения столика  $\nu$  от косинуса угла наклона оси гироскопа  $\cos\alpha$ . Нанесите рассчитанные погрешности в виде интервалов на график.

### **Задание 3.**

1. Из определения момента сил, действующего на материальную точку и момента импульса этой точки, получите момент инерции материальной точки.

2. Произведите серию измерений периода вращения столика с гироскопом при угле наклона оси гироскопа к вертикали  $\alpha = 60^\circ$ . Результаты эксперимента занесите в таблицу 1. Рассчитайте погрешности определения частоты вращения столика.

3. Постройте и проанализируйте график зависимости частоты вращения столика  $\nu$  от частоты вращения гироскопа  $\nu_0$ . Нанесите рассчитанные погрешности в виде интервалов на график.

### **Задание 4.**

1. Покажите на примере двух взаимодействующих материальных точек выполнение закона сохранения момента импульса относительно произвольной точки  $O$ .

2. Произведите серию измерений периода вращения столика с гироскопом в зависимости от угла наклона оси гироскопа при постоянной частоте вращения гироскопа  $\nu_0 = 40$  Гц. Результаты эксперимента занесите в таблицу 2. Рассчитайте погрешности определения частоты вращения столика.

3. Постройте и проанализируйте график зависимости частоты вращения столика  $\nu$  от косинуса угла наклона оси гироскопа  $\cos\alpha$ . Нанесите рассчитанные погрешности в виде интервалов на график.