

**НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ  
МИСиС**

**Блохин Д. И., Мудрецова Л. В.**

**МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ  
И КОНТРОЛЬНЫЕ РАБОТЫ ПО ФИЗИКЕ  
для студентов заочной формы обучения**

**Раздел «Термодинамика и статистическая физика»**

**Москва 2017**

Методическое пособие предназначено для самостоятельной работы и контроля знаний по разделу «Термодинамика и статистическая физика» учебной дисциплины «Физика» студентов заочной формы обучения НИТУ «МИСиС».

В учебном пособии содержатся основные физические понятия и формулы из соответствующего раздела физики, включены примеры решения типовых задач. В конце пособия приведены варианты контрольных работ, выполнение которых необходимо для успешного прохождения промежуточной аттестации.

## **ЧАСТЬ VI**

## 6.1. УРАВНЕНИЕ СОСТОЯНИЯ ГАЗА

### Теоретический минимум

Термодинамика и молекулярная физика, взаимно дополняя друг друга, отличаются различным подходом к изучаемым явлениям.

Термодинамика изучает МАКРОскопические свойства тел и явлений природы, не входя в микроскопическое рассмотрение процессов. Основные выводы термодинамики основаны на законах, являющихся обобщением опытных фактов.

Молекулярная физика (молекулярно – кинетическая теория) исходит из того, что любое тело – твердое, жидкое или газообразное состоит из большого количества МИКРОчастиц (молекул или атомов). Эти частицы хаотически движутся. Молекулы и атомы взаимодействуют друг с другом (между ними могут действовать силы притяжения и отталкивания). При таком подходе наблюдаемые на опыте макроскопические параметры состояния тел, такие как температура, давление и т.д., являются результатом суммарного действия целого ансамбля микрочастиц. Задача описания движения каждой отдельной молекулы такого ансамбля была бы неоправданно сложной. Поэтому для описания поведения систем, состоящих из большого числа объектов, используют статистический метод, позволяющий перейти от характеристик движения одной частицы к средним величинам, характеризующим огромную совокупность частиц.

Исторически основные законы, управляющие тепловыми процессами, были определены в рамках макроскопического подхода. В дальнейшем в рамках молекулярно – кинетической теории термодинамические законы получили теоретическое обоснование и были объяснены с точки зрения микроскопических процессов. Следуя исторической традиции, мы будем применять термодинамический подход, а к статистическому методу будем прибегать лишь по мере необходимости.

В качестве основной термодинамической системы выберем идеальный газ.

Идеальный газ – это модель, с помощью которой удобно описывать поведение реальных газов и их смесей. Примером идеального газа является реальный газ, если он достаточно разрежен (например, обычный воздух). Идеальному газу принято приписывать следующие свойства:

1. собственным объемом всех молекул газа можно пренебречь по сравнению с объемом сосуда, в котором этот газ находится;
2. время столкновения молекул друг с другом пренебрежимо мало по сравнению со временем между двумя соударениями;
3. молекулы взаимодействуют между собой только при непосредственном упругом соударении, при этом они отталкиваются;
4. силы притяжения между молекулами идеального газа ничтожно малы и ими можно пренебречь;
5. столкновения молекул описываются законами классической механики.

В основе термодинамического метода лежит понятие о состоянии тела или системы, которое определяется параметрами состояния. Важную роль в формировании состояния системы играет взаимодействие её с окружением: в общем случае открытой системы происходит обмен с окружением как частицами (массой), так и энергией (в форме тепла и работы). Состояние системы, находящейся длительное время в тепловом контакте с окружающей средой (обмен энергией и работой), называют состоянием термодинамического (или теплового) равновесия, которое характеризуется определенными значениями макроскопических параметров: давлением  $P$ , абсолютной температурой  $T$  и объемом  $V$ . (Заметим, что это МАКРОскопические характеристики, т.е. величины, характеризующие газ в целом, а не отдельные составляющие его молекулы).

Если меняется хотя бы одна из этих величин, система (например, идеальный газ) переходит в другое состояние. Переход из одного состояния в

другое называется процессом. Мы будем рассматривать равновесные процессы, т. е. наши процессы таковы, что в каждый момент протекания процесса система находится в состоянии термодинамического равновесия.

Давлением  $P$  называется величина, равная отношению нормальной составляющей силы  $F_n$  к площади  $S$ , на которую действует эта сила:

$$P = \frac{F_n}{S}. \quad (6.1.1)$$

В системе СИ давление  $P$  измеряют в паскалях ( $Па$ ). Так, атмосферное давление  $P_{атм}$  при нормальных условиях (н. у.) приближенно равно  $1,01 \cdot 10^5 Па$ .

Температура характеризует степень нагретости тел. Абсолютная температура  $T$  в системе СИ измеряется в Кельвинах ( $K$ ). Она не может быть отрицательной, так как пропорциональна средней кинетической энергии частицы. Помимо шкалы Кельвина широко распространена шкала Цельсия. Между абсолютной температурой  $T$  и температурой по Цельсию  $t$  существует линейная связь:  $T = t(^{\circ}C) + 273$ . Так, температура воздуха при нормальных условиях (н. у.) равна  $0^{\circ}C$  или  $273 K$ .

Газ всегда занимает весь предоставленный ему объем. Поэтому объем газа  $V$  равен объему сосуда, в котором газ находится. В системе СИ объем измеряют в  $м^3$ .

Параметры состояния термодинамического равновесия не являются независимыми. Закон, устанавливающий связь между ними называется уравнением состояния. Уравнение состояния идеального газа носит имя Клапейрона – Менделеева и имеет вид:

$$PV = \nu RT, \quad (6.1.2)$$

где  $R = 8,31 \text{ Дж} / (\text{моль} \cdot \text{град})$  – универсальная газовая постоянная, а  $\nu$  – количество вещества или – число молей газа.

Напомним, что одним молем называется количество вещества, содержащее число Авогадро  $N_a = 6,02 \cdot 10^{23}$  частиц. Тогда количество вещества

$\nu$  можно определить как  $\nu = N/N_a$ , если мы знаем общее число частиц газа  $N$  или как  $\nu = m/\mu$ , если мы знаем массу газа  $m$  и массу одного моля газа  $\mu$ .

Из (6.1.2.) легко получить другую часто используемую форму записи уравнения состояния идеального газа в виде:

$$P = \frac{1}{V} \frac{N}{N_a} RT = \frac{N}{V} \frac{R}{N_a} T = nkT, \quad (6.1.3)$$

где  $n = N/V$  – концентрация, а  $k = R/N_a$  ( $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$  Дж / град) – постоянная Больцмана.

Процесс, при котором  $T = const$  называется изотермическим (см. Рис. 6.1.1). Следствием уравнения (6.1.2) для изотермического процесса является, так называемый, закон Бойля – Мариотта, который для неизменного числа молей газа может быть записан в виде:

$$PV = Const. \quad (6.1.4)$$

Процесс, идущий при постоянном давлении  $P = Const$ , называется изобарическим (Рис. 6.1.1) и подчиняется закону Гей – Люссака:

$$V/T = Const, \quad (6.1.5)$$

который также является следствием (6.1.2) для неизменного числа молей газа.

Процесс, идущий при постоянном объеме  $V = Const$ , носит название изохорического (Рис. 6.1.1) и подчиняется закону Шарля:

$$P/T = Const, \quad (6.1.6)$$

также следующему из (6.1.2) для неизменного числа молей газа.

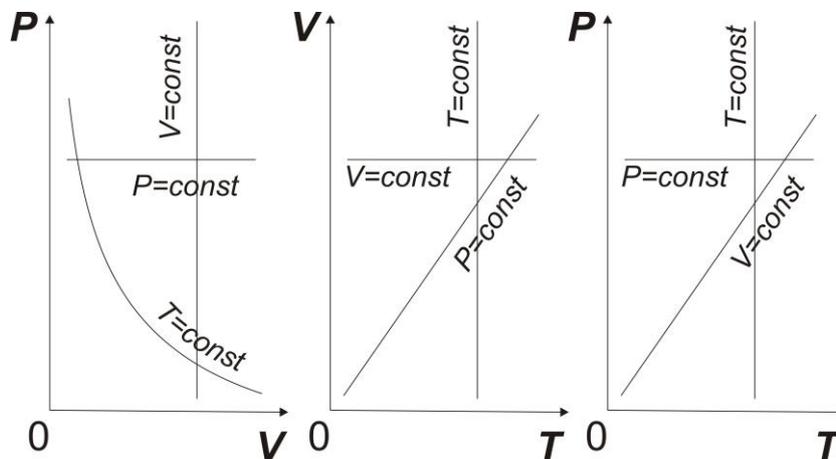


Рис. 6.1.1.

Из уравнения (6.1.3) следует, что

$$N = \frac{PV}{kT}. \quad (6.1.7)$$

Соотношение (6.1.7) носит название закона Авогадро, который утверждает, что в равных объемах разных газов при одинаковых давлении и температуре содержится одинаковое число молекул.

Из уравнения состояния в форме (6.1.3) следует закон Дальтона:

$$P = P_1 + P_2 + P_3 + \dots + P_n \quad (6.1.8)$$

– давление смеси идеальных газов равно сумме давлений газов, входящих в состав смеси (парциальных давлений).

По мере возрастания давления и температуры газ становится все менее похожим на идеальный, и в нем уже нельзя пренебрегать взаимным притяжением и отталкиванием молекул. Путем введения определенных поправок в уравнение состояния идеального газа (6.1.2), Ван-дер-Ваальсом было получено уравнение:

$$\left( P + \frac{N^2}{V^2} a \right) \cdot (V - Nb) = NkT, \quad (6.1.9)$$

где  $k = R/N_a$  - постоянная Больцмана (см. (6.1.3)). Уравнение (6.1.9) достаточно хорошо работает в области низких температур и высоких давлений.

Коэффициенты  $a$  и  $b$  в уравнении Ван-дер-Ваальса (6.1.9) – это постоянные, измеряющиеся в системе СИ в  $\text{Па} \cdot \text{м}^6$  и  $\text{м}^3$  соответственно. Численные значения  $a$  и  $b$  различны для разных газов и определяются из опыта.

## Примеры решения задач

### Задача 1.

В закрытом сосуде объемом  $V = 2 \text{ м}^3$  находится  $m_1 = 2,7 \text{ кг}$  воды и  $m_2 = 3,2 \text{ кг}$  кислорода. Найти давление  $P$  в сосуде при температуре  $t = 527 \text{ }^\circ\text{C}$ . Считать, что в этих условиях вся вода превращается в пар, который можно считать идеальным газом.

Решение:

При температуре  $T = t + 273 = 800 \text{ К}$  в сосуде будет находиться смесь газов.

Парциальное давление каждого из них выразим из уравнения Клапейрона – Менделеева (6.1.2), записанного в виде:

$$PV = \frac{m}{\mu} RT. \quad (6.1.10)$$

Тогда для воды  $P_1 = \frac{m_1}{V\mu_1} RT$ , где  $\mu_1 = 18 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$ , а для кислорода

$$P_2 = \frac{m_2}{V\mu_2} RT, \text{ где } \mu_2 = 32 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}.$$

Согласно закону Дальтона (6.1.8) давление смеси газов равно сумме их парциальных давлений  $P = P_1 + P_2$ . Окончательно получим:

$$P = \frac{RT}{V} \left( \frac{m_1}{\mu_1} + \frac{m_2}{\mu_2} \right) = 8,3 \cdot 10^5 \text{ Па}.$$

Ответ:  $P = 8,3 \cdot 10^5 \text{ Па}$ .

### Задача 2.

Плотность некоторого газа при температуре  $t = 10 \text{ }^\circ\text{C}$  и давлении  $P = 2 \cdot 10^5 \text{ Па}$  равна  $\rho = 0,34 \text{ кг/м}^3$ . Чему равна молярная масса  $\mu$  этого газа?

Решение:

Запишем уравнение Клапейрона – Менделеева в виде  $PV = \frac{m}{\mu} RT$ .

Разделим в нем правую и левую часть на объем  $V$ . Тогда, учитывая, что  $\rho = \frac{m}{V}$ ,

получим  $P = \frac{\rho}{\mu} RT$ , откуда следует, что  $\mu = \frac{\rho}{P} RT$ . Подставив числовые

данные, получим  $\mu = 4 \text{ кг} / \text{кмоль}$ .

Ответ:  $\mu = 4 \text{ кг} / \text{кмоль}$ .

### Задачи

- 6.1.01 Какой объем  $V$  занимает смесь газов – азота массой  $m_1 = 1 \text{ кг}$  и гелия массой  $m_2 = 1 \text{ кг}$  при нормальных условиях ?
- 6.1.02 В баллонах вместимостью  $V_1 = 20 \text{ л}$  и  $V_2 = 44 \text{ л}$  содержится газ. Давление в первом баллоне  $P_1 = 2,4 \text{ МПа}$ , во втором –  $P_2 = 1,6 \text{ МПа}$ . Определить общее давление  $P$  смеси газа, которое установится после соединения баллонов, если температура газа осталась прежней.
- 6.1.03 В сосуде вместимостью  $V = 0,01 \text{ м}^3$  содержится смесь газов – азота массой  $m_1 = 7 \text{ г}$  и водорода массой  $m_2 = 1 \text{ г}$  при температуре  $T = 280 \text{ }^\circ\text{K}$ . Определить давление  $P$  смеси газов.
- 6.1.04 Баллон вместимостью  $V = 30 \text{ л}$  содержит смесь водорода и гелия при температуре  $T = 300 \text{ }^\circ\text{K}$  и давлении  $P = 828 \text{ кПа}$ . Масса  $m$  смеси равна  $24 \text{ г}$ . Определить массу  $m_1$  водорода и массу  $m_2$  гелия.
- 6.1.05 В баллоне вместимостью  $V = 25 \text{ л}$  находится водород при температуре  $T = 290 \text{ }^\circ\text{K}$ . После того как часть водорода израсходовали, давление в баллоне понизилось на  $\Delta P = 0,4 \text{ МПа}$ . Определить массу  $m$  израсходованного водорода.
- 6.1.06 Газ при температуре  $T = 309 \text{ }^\circ\text{K}$  и давлении  $P = 0,7 \text{ МПа}$  имеет плотность  $\rho = 12 \text{ кг} / \text{м}^3$ . Определить молярную массу газа  $\mu$ .
- 6.1.07 В двух сосудах емкостью  $V_1 = 3 \text{ л}$  и  $V_2 = 5 \text{ л}$  находятся соответственно азот под давлением  $P_1 = 1 \text{ атм}$  ( $1 \text{ атм} = 10^5 \text{ Па}$ )

и окись углерода (CO) под давлением  $P_2 = 5 \text{ атм}$ . Сосуды соединяются тонкой трубкой, объемом которой можно пренебречь. Найти установившееся давление  $P$  смеси, если начальная температура обоих газов равна температуре окружающей среды.

- 6.1.08 Баллон содержит  $m_1 = 80 \text{ г}$  кислорода и  $m_2 = 320 \text{ г}$  аргона. Давление смеси  $P = 1 \text{ МПа}$ , температура  $T = 300 \text{ °К}$ . Считая газы идеальными, определить объем баллона.
- 6.1.09 Найти число  $N$  молекул в  $V = 1 \text{ см}^3$  и плотность  $\rho$  азота при давлении  $P = 10^{-11} \text{ мм. рт. ст.}$  и температуре  $t = 15 \text{ °С}$ .
- 6.1.10 В баллоне емкостью  $V = 30 \text{ л}$  находится сжатый воздух при температуре  $t = 17 \text{ °С}$ . После того, как часть воздуха израсходовали, давление понизилось на  $\Delta P = 2 \cdot 10^5 \text{ Па}$ . Какое количество воздуха было израсходовано, если температура его оставалась постоянной?

## 6.2. ПЕРВОЕ НАЧАЛО ТЕРМОДИНАМИКИ

### Теоретический минимум

Термодинамический подход активно развивался под давлением необходимости решения задач, важных для практики: нужно было построить движитель, который совершал бы механическую работу за счет энергии тепла. С этой целью были определены центральные понятия термодинамики, такие как: работа, внутренняя энергия, энтропия, первое и второе начала. В описании термодинамического поведения системы важнейшую роль играет характер взаимодействия системы с окружением; по типу этого взаимодействия системы делятся на:

1. изолированные – система не обменивается с окружением ни веществом, ни энергией;
2. закрытые – обмен энергией (работой) происходит, а веществом – нет;
3. открытые – возможен обмен, как энергией (работой), так и веществом.

Рассмотрим газ, находящийся под поршнем в цилиндрическом сосуде (Рис. 6.2.1).

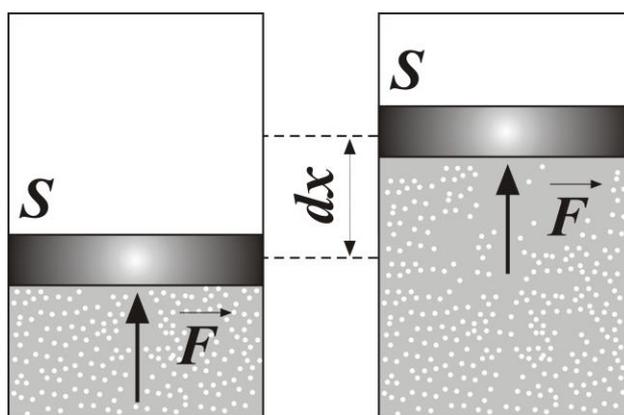


Рис. 6.2.1.

Если газ, расширяясь, передвигает поршень на малое расстояние  $dx$ , то газ совершает работу  $\delta A = F \cdot dx$ , где  $F$  – сила, действующая на поршень со стороны газа. Учитывая то, что  $F = P \cdot S$  (см. 6.1.1) и изменение объема равно

$dV = S \cdot dx$ , получим:

$$\delta A = PdV. \quad (6.2.1)$$

Формула (6.2.1) определяет бесконечно малую работу при бесконечно малом изменении объема газа. Если объем газа увеличивается ( $dV > 0$ ), то  $\delta A > 0$  т.е. газ, расширяясь, совершает работу. В противном случае  $\delta A < 0$ , и работа совершается над газом.

Полная работа определяется как интеграл:

$$A = \int_{V_1}^{V_2} \delta A = \int_{V_1}^{V_2} PdV \quad (6.2.2)$$

и графически может быть представлена как площадь под кривой  $1 - 2$  (площадь фигуры  $1 - 2 - V_2 - V_1$ ) на Рис. 6.2.2. (Напомним, что в системе СИ единицей измерения работы является Джоуль (Дж)).

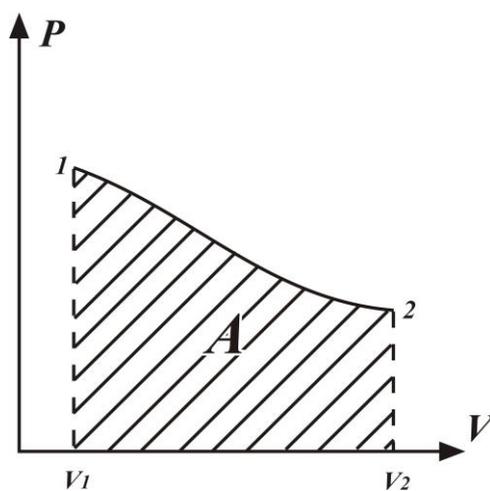


Рис. 6.2.2.

Определим количество теплоты  $Q$  как энергию, передаваемую путем теплообмена с окружающей средой (теплопроводность, конвекция, излучение). Единицей измерения  $Q$  в системе СИ будет тогда Джоуль (Дж).

Процессы, происходящие без теплообмена с окружающей средой так, что переданное количество теплоты  $\delta Q = 0$ , называются адиабатическими (Рис. 6.2.3).

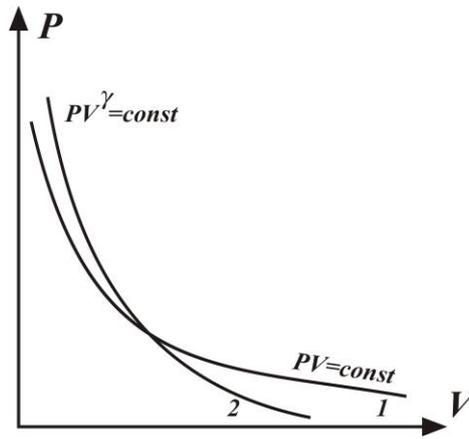


Рис. 6.2.3.

- 1 – график изотермического процесса;  
 2 – график адиабатического процесса.

Внутренняя энергия  $U(T, V)$  – функция термодинамических параметров системы, изменение которой  $dU$  определяется работой  $\delta A$ , совершаемой над системой при адиабатическом процессе. Существование такой функции есть следствие первого начала термодинамики, согласно которому полный дифференциал внутренней энергии равен:

$$dU = \delta Q - \delta A. \quad (6.2.3)$$

Если количество теплоты сообщается телу, то  $\delta Q > 0$ , в противном случае  $\delta Q < 0$ .

Внутренняя энергия  $U$  в системе СИ измеряется в Джоулях. Она складывается из кинетической энергии хаотического теплового движения составляющих его частиц и потенциальной энергии их взаимодействия. Кинетическая и потенциальная энергия тела как целого, являясь механическими характеристиками, во внутреннюю энергию не входят.

Количество теплоты  $\delta Q$  и работа  $\delta A$  обозначаются иначе, чем приращение внутренней энергии  $dU$ . Это различие в обозначениях носит принципиальный характер. Дело в том, что внутренняя энергия является функцией состояния тела. Это означает, что всякий раз, когда система оказывается в данном состоянии, ее внутренняя энергия принимает присущее этому состоянию значение, независимо от предыстории системы. Следовательно, изменение  $dU$  при переходе системы из одного состояния в

другое равно разности значений внутренней энергии в этих состояниях, независимо от процесса:

$$\Delta U = \int_1^2 dU = U_2 - U_1. \quad (6.2.4)$$

Если система возвращается в исходное состояние, то изменение внутренней энергии в таком процессе равно нулю:

$$\oint dU = \int_1^1 dU = U_1 - U_1 = 0. \quad (6.2.5)$$

Известно, что в классической молекулярной физике в состоянии теплового равновесия на каждую степень свободы молекулы приходится энергия теплового движения, равная  $kT/2$ , где  $T$  – абсолютная температура,  $k$  – постоянная Больцмана. Напомним, что числом степеней свободы системы называют количество независимых параметров, задающих конфигурацию системы. Если  $i$  – число степеней свободы молекулы идеального газа, то  $ikT/2$  – энергия теплового движения молекулы.

Внутренняя энергия  $U$  одного моля таких молекул (их количество в одном моле равно числу Авогадро  $N_a$ ) равна:

$$U = \frac{iRT}{2}, \quad (6.2.6)$$

где  $N_a k = R$  – универсальная газовая постоянная.

Работа и количество теплоты не являются функциями состояния. Совершенная работа и количество переданной теплоты существенно зависят от способа проведения процесса. Так, площадь под кривой Рис. 6.2.2 зависит от формы этой кривой, и, если система возвращается в исходное состояние через другие промежуточные состояния, т.е. по другой кривой, работа такого процесса не равна нулю:  $A = \oint \delta A \neq 0$ .

Для количества теплоты, переданного или полученного в ходе подобного процесса также справедливо:  $Q = \oint \delta Q \neq 0$ .

Количество теплоты, которое необходимо сообщить телу, чтобы увеличить его температуру на один градус, называется теплоемкостью тела:

$$c = \frac{dQ}{dT}. \quad (6.2.7)$$

Удельной теплоемкостью  $c$  называется теплоемкость, отнесенная к единице массы вещества. Ее размерность в системе СИ: Дж/(кг · К).

Молярной теплоемкостью  $C$  называется теплоемкость одного моля вещества. Ее размерность в системе СИ: Дж/(моль · К).

Связь между этими величинами определяется простым соотношением:

$$c = \frac{C}{\mu}, \quad (6.2.8)$$

где  $\mu$  – молярная масса.

Теплоемкость зависит от вида процесса. Наиболее употребительными являются теплоемкость при постоянном объеме  $C_V$  и при постоянном давлении  $C_p$ .

При изохорном процессе ( $V = const$ )  $\delta A = P \cdot dV = 0$  и, согласно первому закону термодинамики,  $\delta Q = dU$  т.е. все тепло идет на увеличение внутренней энергии тела. Поэтому теплоемкость при постоянном объеме:

$$C_V = \left( \frac{\delta Q}{dT} \right)_V = \frac{dU}{dT}. \quad (6.2.9)$$

При изобарном процессе ( $P = const$ ) теплоемкость равна  $C_p = \left( \frac{\delta Q}{dT} \right)_p$ , и применение первого начала термодинамики (6.2.3) дает:

$$C_p dT = dU + PdV = C_V dT + pdV. \quad (6.2.10).$$

Выразив из (6.1.2)  $PdV$  в виде  $PdV = \nu R dT$ , получим:

$$C_p = C_V + \nu R \quad (6.2.11)$$

или для одного моля газа ( $\nu = 1$  моль):

$$C_p - C_V = R. \quad (6.2.12)$$

Формула (6.2.12) называется соотношением Майера.

Отметим также, что при вычислении работы в случае  $P = const$  давление может быть вынесено из-под знака интеграла (6.2.2), и получается:

$$A = P(V_2 - V_1). \quad (6.2.13)$$

При изотермическом процессе ( $T = const$ ) теплоемкость  $C$  обращается в бесконечность.

При адиабатическом процессе ( $\delta Q$ ) из первого закона термодинамики (6.2.3) следует, что работа совершается газом за счет убыли внутренней энергии:

$$\delta A = -dU.$$

Адиабатический процесс описывается уравнением Пуассона

$$PV^\gamma = Const, \quad (6.2.14)$$

где  $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$  – коэффициент Пуассона, называемый показателем адиабаты.

Из соотношения Майера (6.2.12) следует, что всегда  $\gamma > 1$ . Поэтому график адиабаты в координатах  $P - V$  (Рис. 6.2.3) проходит более круто, чем график изотермы.

Первое начало термодинамики (6.2.3) позволяет в соответствии с данными выше определениями получить для молярной теплоемкости идеального газа, следующие соотношения:

$$C_v = \frac{i}{2} R; \quad (6.2.15)$$

$$C_p = \frac{i+2}{2} R. \quad (6.2.16.)$$

В широком диапазоне температур ( $300 K < T < 800 K$ ) число степеней свободы  $i$  равно:

- $i = 3$  (для одноатомных газов);
- $i = 5$  (для двухатомных молекул с жесткой связью между атомами);
- $i = 6$  (для трех – и многоатомных газов).

## Примеры решения задач

### Задача 1.

Кислород массой  $m = 800$  г, охлажденный от температуры  $t_1 = 100$  °С до температуры  $t_2 = 20$  °С, сохранил неизменный объем. Определить: количество теплоты  $Q$ , полученное газом; изменение  $\Delta U$  внутренней энергии и совершенную газом работу.

Решение:

Работа является функцией процесса  $L$ :  $A = \int_L \partial A = \int_L P(V)dV$ . В нашей задаче процесс изохорный ( $V = Const$ ); следовательно,  $dV = 0$  и поэтому  $A = 0$ .

Первое нечало термодинамики в нашем случае имеет вид:

$$\delta Q = dU \text{ или } Q = \Delta U. \quad (6.2.17)$$

Поскольку газ охладили, внутренняя энергия уменьшилась:

$$\Delta U = C_v(T_2 - T_1) < 0, \quad (6.2.18)$$

а  $C_v = \frac{m}{\mu} R \frac{i}{2}$ , где  $i = 5$  для двухатомных молекул кислорода, а  $\mu = 32 \cdot 10^{-3}$  кг/моль.

Подставляя числовые данные, получаем:

$$\Delta U = \frac{0,8 \cdot 8,31}{32 \cdot 10^{-3}} \cdot \frac{5}{2} (20 - 100) = -41,55 \text{ кДж.}$$

Соответственно, кислород не получил, а отдал тепло, на что указывает отрицательное значение «полученного» тепла:

$$Q = \Delta U = -41,55 \text{ кДж.}$$

Ответ:  $Q = -41,55$  кДж,  $\Delta U = -41,55$  кДж,  $A = 0$ .

### Задача 2.

Гелий массой  $m = 4$  кг, находившийся при  $T = 273$  К, изотермически расширяется от объема  $V_1$  до объема  $V_2 = 2V_1$  за счет полученного извне тепла. Найти работу  $A$ , совершенную газом при расширении, и количество сообщенного газу тепла  $Q$ . Молярная масса гелия  $\mu = 4 \cdot 10^{-3}$  кг/моль.

### Решение:

Из уравнения Клапейрона-Менделеева (6.1.2) следует, что  $P = \frac{m}{\mu V} RT$ .

Тогда, согласно формуле (6.2.2) для  $T = Const$  имеем:

$$A = \int_{V_1}^{V_2} P dV = \frac{mRT}{\mu} \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = \frac{mRT}{\mu} \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) = 1,57 \text{ МДж.}$$

Из формулы (6.2.14.) следует, что изменение внутренней энергии при изотермическом процессе  $dU = 0$ . Тогда по первому закону термодинамики (6.2.3) все сообщенное газу тепло идет на совершение работы, т.е.  $Q = A = 1,57 \text{ МДж}$ .

Ответ:  $Q = 1,57 \text{ МДж}$ ,  $A = 1,57 \text{ МДж}$ .

### Задачи

- 6.2.01 Водород занимает объем  $V_1 = 10 \text{ м}^3$  при давлении  $P_1 = 100 \text{ кПа}$ . Газ нагрели при постоянном объеме до давления  $P_2 = 300 \text{ кПа}$ . Определить изменение  $\Delta U$  внутренней энергии газа, работу  $A$ , совершенную газом и количество теплоты  $Q$ , сообщенное газу.
- 6.2.02 Баллон вместимостью  $V = 20 \text{ л}$  содержит водород при температуре  $T = 300 \text{ К}$  и под давлением  $P = 0,4 \text{ МПа}$ . Какими станут температура  $T_1$  и давление  $P_1$ , если газу сообщить количество теплоты  $Q = 6 \text{ кДж}$ .
- 6.2.03 Кислород нагревают при постоянном давлении  $P = 80 \text{ кПа}$ . При этом его объем увеличивается от  $V_1 = 1 \text{ м}^3$  до  $V_2 = 3 \text{ м}^3$ . Определить изменение  $\Delta U$  внутренней энергии кислорода; работу  $A$ , совершенную им при расширении; количество теплоты  $Q$ , сообщенное газу.
- 6.2.04 Расширяясь, водород совершил работу  $A = 6 \text{ кДж}$ . Определить количество теплоты  $Q$ , подведенное к газу, если процесс протекал изобарно.
- 6.2.05 Азот массой  $m = 200 \text{ г}$  расширяется изотермически при

температуре  $T = 280 \text{ K}$ , причем объем газа увеличивается в два раза. Найти совершенную при расширении газа работу  $A$  и количество теплоты  $Q$ , полученное газом.

- 6.2.06 При изотермическом расширении водорода массой  $m = 1 \text{ г}$ , имевшего температуру  $T = 280 \text{ K}$ , объем газа увеличился в три раза. Определить совершенную при расширении газа работу  $A$  и количество теплоты  $Q$ , полученное газом.
- 6.2.07 Азот, занимавший объем  $V_1 = 10 \text{ л}$  под давлением  $P_1 = 0,2 \text{ МПа}$ , изотермически расширился до объема  $V_2 = 28 \text{ л}$ . Определить работу  $A$  расширения газа и количество теплоты  $Q$ , полученное газом.
- 6.2.08 При адиабатном расширении кислорода с начальной температурой  $T_1 = 320 \text{ K}$  его внутренняя энергия уменьшилась на  $\Delta U = 8,4 \text{ кДж}$ , а объем увеличился в  $N = 10$  раз. Определить массу  $m$  кислорода.
- 6.2.09 Водород при нормальных условиях имел объем  $V_1 = 100 \text{ м}^3$ . Найти изменение  $\Delta U$  внутренней энергии газа при его адиабатном расширении до объема  $V_2 = 150 \text{ м}^3$ .
- 6.2.10 Давление азота объемом  $V = 3 \text{ л}$  при нагревании увеличилось на  $\Delta P = 1 \text{ МПа}$ . Определить количество теплоты  $Q$ , полученное газом, если объем газа остался неизменным.

### **6.3. ВТОРОЕ НАЧАЛО ТЕРМОДИНАМИКИ**

#### **Теоретический минимум**

Первый закон термодинамики следит за тем, чтоб полная энергия системы в ходе тепловых процессов оставалась постоянной. Согласно ему, внутреннюю энергию системы можно изменить, сообщая системе тепло или совершая над ней работу. Однако, первый закон термодинамики не дает никаких указаний относительно направления, в котором могут происходить процессы теплопередачи в природе. Например, он не запрещает самопроизвольную передачу тепла от холодного тела к горячему.

Второй закон термодинамики, напротив, позволяет судить о направлении протекания спонтанных (самопроизвольных) реальных физических процессов.

Система, помещенная в неизменные внешние условия, стремится перейти в стационарное состояние, в котором определяющие его термодинамические параметры (например, температура) не изменяются во времени.

Тогда состоянием термодинамического равновесия является стационарное (неизменное во времени) состояние термодинамически изолированной системы. При этом параметры системы имеют определенные значения, одинаковые для всех ее частей.

Процесс называется равновесным (квазистатическим), если состояние тела в любой момент времени является равновесным. В ходе равновесного процесса происходит лишь последовательная смена одних равновесных состояний другими. Важнейшим свойством любого равновесного процесса является его обратимость во времени. Обратимость означает возможность возвращения тела в первоначальное состояние через те же промежуточные состояния, которые были пройдены в прямой последовательности.

Неравновесным называется процесс, при котором хотя бы одно из состояний, проходимых телом, является неравновесным. Неравновесные процессы необратимы.

Свойства необратимости любых макроскопических процессов в

изолированной системе определяются изменением величины, которая называется энтропией  $S$ .

В термодинамике энтропия  $S$  вводится как величина, малое изменение которой  $dS$  связано с количеством теплоты  $\delta Q$ , переданной системе в равновесном (обратимом) процессе, соотношением:

$$dS = \frac{\delta Q}{T}. \quad (6.3.1)$$

Из (3.3.1) следует, что в системе СИ энтропия  $S$  измеряется в Дж/К.

Подставив (3.3.1) в первый закон термодинамики (3.2.3), получим:

$$dU = TdS - PdV. \quad (6.3.2)$$

Рассмотрим свойства энтропии, которые следуют из ее определения:

1. Энтропия системы нескольких тел равна сумме энтропий каждого тела (энтропия аддитивна).
2. Энтропия равновесных адиабатических процессов ( $\delta Q = 0$ ) постоянна  $S = Const$ .
3. При постоянном объеме ( $V = Const$ ) энтропия является монотонно возрастающей функцией внутренней энергии тела  $U$ .
4. Энтропия определена с точностью до произвольной константы интегрирования:

$$S = \int \frac{\delta Q}{T} + Const. \quad (6.3.3)$$

Поэтому физический смысл имеет не сама энтропия, а ее изменение:

$$\Delta S = \int \frac{\delta Q}{T}. \quad (6.3.4)$$

5. Энтропия является функцией состояния системы, т.е. изменение энтропии  $\Delta S$  зависит только от начального и конечного состояния системы, но не от пути интегрирования:

$$\Delta S = \int_1^2 dS = S_2 - S_1. \quad (6.3.5)$$

Второе начало термодинамики, известное также как закон возрастания энтропии, гласит: в любой изолированной макроскопической системе

изменение энтропии при любом реальном процессе удовлетворяет неравенству  $\Delta S \geq 0$ . Причем, знак равенства относится к обратимым равновесным, а знак “ > ” к необратимым неравновесным процессам.

Таким образом, величина  $\Delta S$  является количественной характеристикой степени необратимости процесса.

Закон возрастания энтропии имеет два следствия, которые исторически были первыми формулировками второго начала термодинамики:

Первая из них, данная Клаузиусом, такова:

*Невозможен процесс, при котором тепло самопроизвольно переходит от тел менее нагретых к телам, более нагретым.*

Другая формулировка принадлежит Кельвину:

*Невозможно получить работу за счет систематического охлаждения одного тела без каких-либо изменений во всех других телах.*

Круговым или циклическим называется процесс, в результате которого тело возвращается в исходное состояние. Циклические процессы осуществляются во всех тепловых двигателях, назначение которых производить работу за счет перераспределения тепла. Карно был предложен тепловой двигатель, работающий по циклу, состоящему из последовательно чередующихся двух изотерм и двух адиабат (Рис. 6.3.1).

Представим себе работу тепловой машины. В цилиндре такой машины помещается рабочее тело. Пусть для определенности это будет идеальный газ. Цилиндр можно приводить в тепловой контакт с двумя тепловыми резервуарами, имеющими постоянные температуры  $T_1$  и  $T_2$  ( $T_1 > T_2$ ). Тепловой резервуар с более высокой температурой  $T_1$  называется нагревателем, а с более низкой температурой  $T_2$  – холодильником. Рабочее тело приводится в тепловой контакт с нагревателем, имеющим температуру  $T_1$ . Затем, медленно уменьшая внешнее давление, его заставляют расширяться по изотерме 1 – 2 (Рис. 6.3.1). При этом от нагревателя заимствуется тепло  $Q_1$  и производится работа  $A_{12}$  против внешнего давления. После этого систему заставляют расширяться по адиабате 2 – 3, пока ее температура не достигнет температуры холодильника  $T_2$ .

При этом также совершается некая работа  $A_{23}$  против внешнего давления. В состоянии 3 систему приводят в тепловой контакт с холодильником и изотермически сжимают ее до некоторого состояния 4. При этом система совершает отрицательную работу  $A_{34}$  и отдает холодильнику некоторое количество теплоты  $Q_2$ . Состояние 4 выбирается так, чтобы можно было сжатием по адиабате  $4 - 1$  вернуть систему в исходное состояние 1. Для этого система должна совершить отрицательную работу  $A_{41}$ . В результате кругового процесса Карно внутренняя энергия системы не изменится, а потому произведенная ею работа равна:

$$A = A_{12} + A_{23} + A_{34} + A_{41} = Q_1 - Q_2. \quad (6.3.6)$$

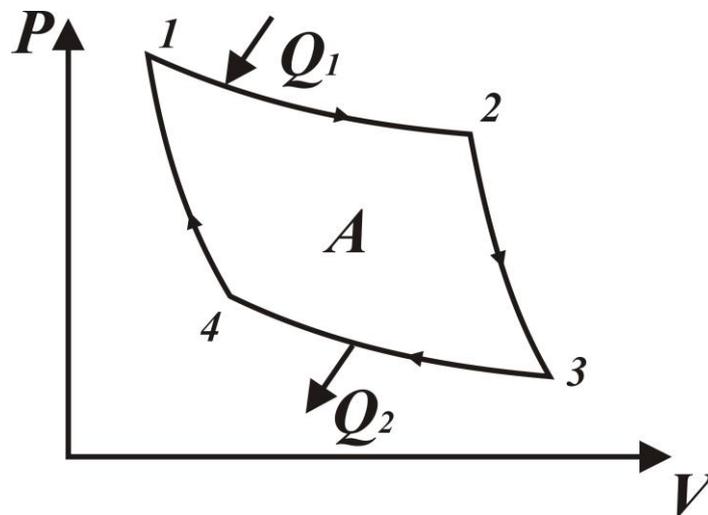


Рис. 6.3.1.

Опираясь на второй закон термодинамики, было доказано, что коэффициент полезного действия (К.П.Д.)  $\eta$  обратимого цикла Карно максимален (превышает аналогичные коэффициенты любого необратимого цикла) и определяется соотношением:

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}. \quad (6.3.7)$$

Формула (6.3.7) служит аналитическим выражением теоремы Карно, которая гласит, что коэффициент полезного действия тепловой машины, работающей по циклу Карно, зависит только от температур  $T_1$  и  $T_2$  нагревателя и холодильника, но не зависит от устройства машины, а также от вида используемого рабочего вещества.

Последнее обстоятельство является важным, поскольку дает возможность построить рациональную температурную шкалу, не зависящую от выбора термометрического тела и устройства термометра (абсолютная температурная шкала).

### **Примеры решения задач**

#### **Задача 1.**

При изотермическом расширении в машине Карно газ совершил работу  $A_{12} = 392,4$  Дж (см. Рис. 3.3.1). Вычислить работу  $A$ , совершенную газом за один цикл, если температура нагревателя  $T_1 = 127^\circ\text{C}$ , а температура холодильника  $T_2 = 2^\circ\text{C}$ .

#### **Решение:**

Тепловая машина, работающая по циклу Карно, совершает за один цикл работу:  $A = Q_1 - Q_2$ . Здесь  $Q_1$  – количество тепла, полученное от нагревателя,  $Q_2$  – количество тепла, отданное холодильнику.

Коэффициент полезного действия цикла Карно определяется формулой (6.3.7):

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{A}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}. \quad (6.3.8)$$

Следовательно, из (6.3.8) получим выражение для работы газа:

$$A = Q_1 \cdot \frac{T_1 - T_2}{T_1}. \quad (6.3.9)$$

В ходе изотермического процесса  $T = \text{Const}$  и  $dT = 0$ . Тогда, согласно (6.2.6), внутренняя энергия меняться не будет  $\Delta U = 0$ , и все сообщенное газу тепло  $Q_1$ , согласно первому началу термодинамики (6.2.3), идет на совершение им работы  $A_{12}$ . Тогда для вычисления полной работы (6.3.9) за цикл окончательно получим:

$$A = A_{12} \cdot \frac{T_1 - T_2}{T_1} = 122,6 \text{ Дж}.$$

Ответ:  $A = 122,6$  Дж.

### Задача 2.

Найти изменение энтропии  $\Delta S$  азота массой  $m = 28$  г при изобарическом расширении от объема  $V_1 = 10$  л до объема  $V_2 = 25$  л. Молярная масса азота  $\mu = 28 \cdot 10^{-3}$  кг/моль.

Решение:

Изменение энтропии определяется формулой (6.3.4):

$$\Delta S = \int_1^2 \frac{\delta Q}{T}. \quad (6.3.10)$$

По первому закону термодинамики (6.2.3)  $dQ = dU + dA$ . Учитывая (6.2.1) и (6.2.8), получим:

$$\delta Q = C_v dT + PdV. \quad (6.3.11)$$

Из уравнения Клапейрона – Менделеева (6.1.2.) следует:

$$P = \frac{m}{\mu V} RT. \quad (6.3.12)$$

Теплоемкость  $\nu$  молей газа при постоянном объеме равна (см. (6.2.15)):

$$C_v = \frac{m}{\mu} \frac{i}{2} R. \quad (6.3.13)$$

Тогда, подставляя (6.3.12) и (6.3.13) в (6.3.11), получим:

$$\delta Q = \frac{m}{\mu} \frac{i}{2} R dT + \frac{m}{\mu} RT \frac{dV}{V}. \quad (6.3.14)$$

Подставляя эту сумму в выражение для изменения энтропии (6.3.4), получаем:

$$\Delta S = \int_{T_1}^{T_2} \frac{i}{2} \frac{m}{\mu} R \frac{dT}{T} + \int_{V_1}^{V_2} \frac{m}{\mu} R \frac{dV}{V} = \frac{i}{2} \frac{m}{\mu} R \int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T} + \frac{m}{\mu} R \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = \frac{i}{2} \frac{m}{\mu} R \ln \left( \frac{T_2}{T_1} \right) + \frac{m}{\mu} R \ln \left( \frac{V_2}{V_1} \right).$$

Так как процесс изобарический, то по закону Гей – Люссака (6.1.5)

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{T_2}{T_1} \text{ и } \ln \left( \frac{V_2}{V_1} \right) = \ln \left( \frac{T_2}{T_1} \right).$$

Поэтому:

$$\Delta S = \frac{(i+2)}{2} \frac{m}{\mu} R \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right).$$

Поскольку газ двухатомный, то  $i = 5$  и, подставляя значения из условия, получим:  $\Delta S = 26,65 \text{ Дж/град}$ .

Ответ:  $\Delta S = 26,65 \text{ Дж/град}$ .

### Задачи

- 6.3.01 Идеальная тепловая машина, работающая по циклу Карно, за каждый цикл получает от нагревателя количество теплоты  $Q_1 = 600 \text{ кал}$ . Температура нагревателя  $T_1 = 400 \text{ К}$ , температура холодильника  $T_2 = 300 \text{ К}$ . Найти работу  $A$ , совершаемую машиной, и количество теплоты  $Q_2$ , отдаваемого холодильнику за один цикл. ( $1 \text{ кал} = 4,2 \text{ Дж}$ )
- 6.3.02 Идеальная тепловая машина работает по циклу Карно. Определить К.П.Д.  $\eta$  цикла, если известно, что за один цикл была произведена работа  $A = 300 \text{ Дж}$  и холодильнику передано количество теплоты  $Q_1 = 3,2 \text{ ккал}$  ( $1 \text{ кал} = 4,2 \text{ Дж}$ ).
- 6.3.03 Тепловая машина работает по циклу Карно. Температура нагревателя  $T_1 = 500 \text{ К}$ . Определить К.П.Д.  $\eta$  цикла и температуру  $T_2$  холодильника, если за счет полученного от нагревателя количества теплоты  $Q_1 = 1 \text{ кДж}$  машина совершает работу  $A = 350 \text{ Дж}$ .
- 6.3.04 Газ, совершающий цикл Карно, отдал холодильнику количество теплоты  $Q_2 = 14 \text{ кДж}$ . Определить температуру  $T_1$  нагревателя, если при температуре холодильника  $T_2 = 280 \text{ К}$  работа газа за полный цикл  $A = 10 \text{ Дж}$ .
- 6.3.05 Газ, совершающий цикл Карно, получает от нагревателя количество теплоты  $Q_1 = 84 \text{ кДж}$ . Какую работу  $A$  совершает газ за один цикл, если температура нагревателя  $T_1$  в три раза превышает температуру холодильника  $T_2$ ?

- 6.3.06 В результате изохорного нагревания водорода массой  $m = 1 \text{ г}$  давление газа  $P$  увеличилось в два раза. Определить изменение  $\Delta S$  энтропии газа.
- 6.3.07 Найти изменение энтропии  $\Delta S$  при изобарном расширении азота массой  $m = 4 \text{ г}$  от объема  $V_1 = 5 \text{ л}$  до объема  $V_2 = 9 \text{ л}$ .
- 6.3.08 Кислород массой  $m = 2 \text{ кг}$  увеличил свой объем в  $n = 5$  раз один раз изотермически, другой – адиабатно. Найти изменение энтропии  $\Delta S$  в каждом из указанных процессов.
- 6.3.09 Найти изменение энтропии  $\Delta S$  при изобарном охлаждении воздуха массой  $m = 2 \text{ г}$  от температуры  $t_1 = 40^\circ\text{C}$  до  $t_2 = 0^\circ\text{C}$ .
- 6.3.10 Найти изменение энтропии  $\Delta S$  при изохорном охлаждении воздуха массой  $m = 20 \text{ г}$  от  $t_1 = 40^\circ\text{C}$  до  $t_2 = 0^\circ\text{C}$ .

## 6.4. СТАТИСТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

### Теоретический минимум

В основе статистического подхода к описанию термодинамического состояния идеального газа лежат следующие утверждения:

1. Поведение большой совокупности молекул качественно отличается от поведения каждой молекулы в отдельности. Характеристиками такого большого числа частиц (молекул) являются, к примеру, давление, температура, теплопроводность, вязкость. Эти макроскопические характеристики нельзя использовать для описания поведения одной молекулы.
2. Существует количественная связь между свойствами коллектива молекул и средними значениями физических величин, характеризующих поведение каждой молекулы. Например, средняя кинетическая энергия молекулы газа пропорциональна абсолютной температуре  $T$ , являющейся свойством большого числа молекул.
3. Свойства коллектива молекул являются макроскопическими свойствами, свойства каждой молекулы – микроскопическими.
4. Статистическая физика оперирует средними значениями величин, характеризующими поведение и свойства каждой молекулы. Поэтому ни направление движения, ни величина скорости каждой молекулы, ни число молекул в каждом малом объеме не играют определяющей роли при вычислении какой-либо макроскопической величины. Например, вычисляя давление газа на стенку, не нужно знать точно, сколько молекул движется в данном направлении. Достаточно исходить из утверждения, что с учетом большого числа молекул и неупорядоченности их движения нет оснований выделять какое – либо направление как преимущественное. В среднем все направления движения молекул равновероятны.

Молекулы газа движутся хаотически. Это движение происходит с

различными скоростями и в различных направлениях. Применяя к хаотическому тепловому движению молекул математический аппарат теории вероятностей, можно получить закон, позволяющий определить распределение молекул по скоростям их движения (распределение Максвелла) в виде:

$$\frac{dN}{N} = f(V)dV = 4\pi \left( \frac{m_0}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} V^2 \exp \left[ -\frac{m_0 V^2}{2kT} \right] dV. \quad (6.4.1)$$

Здесь  $dN$  – число молекул, скорости которых лежат в интервале от  $V$  до  $V + dV$ ;  $N$  – полное число молекул, массы которых одинаковы и равны  $m_0$ ;  $T$  – температура газа в состоянии теплового равновесия. Это означает, что функция  $f(V)$ , определенная (6.4.1), дает долю молекул, скорость которых равна  $V$ , т. е. имеет смысл вероятности (или распределения) и обладает свойством нормировки:

$$\int_0^{\infty} f(V)dV = 1.$$

Следовательно, распределение молекул по значениям модуля скорости, является распределением по значениям кинетической энергии  $E_k = \frac{mV^2}{2}$ .

Графически распределение Максвелла представлено на Рис. 6.4.1.

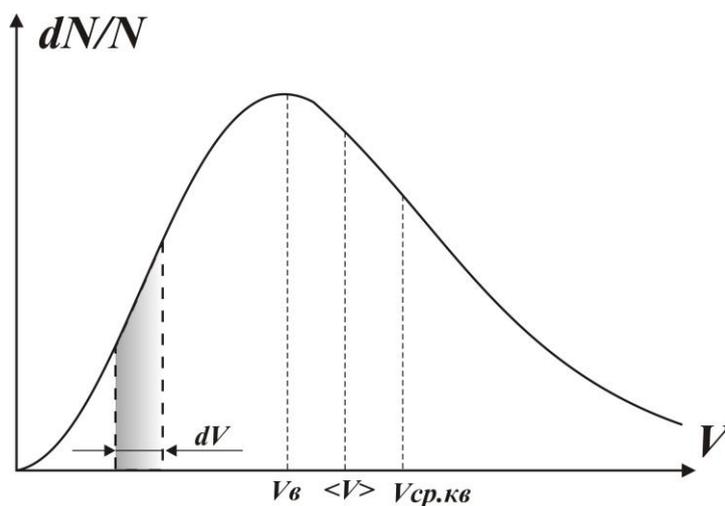


Рис. 6.4.1.

Из формулы (6.4.1) и из Рис. 6.4.1 видно, что существует некоторая скорость  $V_в$ , с которой движется наибольшее число молекул. Ей отвечает

максимум функции  $\frac{dN}{N}$ . Такая скорость  $V_e$  называется наиболее вероятной.

Приравнявая к нулю производную функции распределения  $\frac{df(V)}{dV}$  по скорости  $V$ , и решая полученное уравнение, нетрудно получить выражение для наиболее вероятной скорости  $V_e$ :

$$V_e = \sqrt{\frac{2kT}{m_0}}. \quad (6.4.2)$$

Большинство молекул движется со скоростями, близкими к наиболее вероятной; процентная доля молекул со скоростями много большими или много меньшими  $V_e$  ничтожно мала.

С учетом (6.4.2) распределение Максвелла может быть переписано в виде:

$$\frac{dN}{N} = g(u)du = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \exp[-u^2] u^2 du, \quad (6.4.3)$$

где  $u = \frac{V}{V_e}$ .

Закон распределения Максвелла позволяет также вычислить среднюю  $\langle V \rangle$  (средняя арифметическая) и среднюю квадратичную  $V_{ср.кв} = \sqrt{\langle V^2 \rangle}$  скорости движения молекул:

$$\langle V \rangle = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m_0}}; \quad (6.4.4)$$

$$V_{ср.кв} = \sqrt{\langle V^2 \rangle} = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}}. \quad (6.4.5)$$

Таким образом, с помощью распределения Максвелла удастся связать средние значения величин, характеризующих поведение молекул газа с макроскопическими характеристиками системы.

Используя понятие распределения молекул в пространстве, можно найти зависимость концентрации молекул от высоты  $h$ . Атмосферное давление на какой-либо высоте обусловлено весом вышележащих слоев газа. Вес

вышележащих слоев атмосферы, а следовательно, и давление с высотой  $h$  убывают по экспоненциальному закону:

$$P = P_0 \exp\left[-\frac{m_0 gh}{kT}\right], \quad (6.4.6)$$

где  $P_0$  и  $P$  – давления на нулевой высоте и высоте  $h$ , соответственно. Формула (6.4.6) называется барометрической. Из нее следует, что давление убывает с высотой тем быстрее, чем тяжелее газ и чем ниже температура.

Перейдем от давления  $P$  к концентрации  $n$ , используя связь между ними (6.1.3):

$$n = n_0 \exp\left[-\frac{m_0 gh}{kT}\right], \quad (6.4.7)$$

из которой следует, что с понижением температуры число частиц на высотах, отличных от нуля убывает, стремясь к нулю при  $T = 0$ . При высоких температурах, напротив, концентрация слабо убывает с высотой, так что молекулы оказываются распределенными по высоте почти равномерно. Этот факт объясняется действием двух тенденций: с одной стороны – притяжение молекул к Земле (с силой  $m_0 g$ ) стремится расположить молекулы на поверхности Земли; с другой стороны – тепловое движение (характеризуемое величиной  $kT$ ) стремится разбросать молекулы равномерно по всем высотам.

На разной высоте молекула обладает различным запасом потенциальной энергии:  $E_p = m_0 gh$ . Следовательно, распределение молекул по высоте является вместе с тем и распределением по значениям потенциальной энергии:

$$n = n_0 \exp\left[-\frac{E_p}{kT}\right]. \quad (6.4.8)$$

Из (6.4.8) следует, что молекулы располагаются с большей плотностью там, где меньше всего их потенциальная энергия, и наоборот, с меньшей плотностью – в местах, где их потенциальная энергия больше.

Распределение (6.4.8) справедливо не только в случае потенциального поля сил земного тяготения, но и в любом потенциальном поле сил для совокупности любых одинаковых частиц, находящихся в состоянии

хаотического теплового движения. Соотношение (6.4.8) называют распределением Больцмана.

### Примеры решения задач

#### Задача 1.

Какая часть молекул идеального газа имеет скорости, отличные от  $\frac{V_g}{\sqrt{2}}$  ( $V_g$  – наиболее вероятная скорость) не более чем на 1 % ?

Решение:

Воспользуемся законом распределения Максвелла, записанным в виде

$$(6.4.3): \frac{\Delta N}{N} = \int_{u_1}^{u_2} g(u) du = \int_{u_1}^{u_2} \frac{4}{\sqrt{\pi}} \exp[-u^2] du. \text{ Здесь } u = \frac{V}{V_g} = \frac{1}{\sqrt{2}}. \text{ Так как интервал}$$

скоростей мал  $\Delta u = 0,02$ , то функция распределения  $g(u)$  в (6.4.3) почти постоянна  $g(u_1) \approx g(u_2) \approx g(u)$ . Будем считать ее константой и вынесем за знак интеграла. При этом получим:

$$\frac{\Delta N}{N} \approx g(u) \Delta u = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \exp[-u^2] u^2 \Delta u = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\right] \frac{1}{2} \Delta u \approx 1,4 \cdot 10^{-2}.$$

Ответ:  $\frac{\Delta N}{N} \approx 1,4 \cdot 10^{-2}.$

#### Задача 2.

На какой высоте  $h$  над уровнем моря концентрация воздуха  $n$  уменьшается в два раза? Молярная масса воздуха равна  $\mu = 29$  кг/кмоль. Считать, что температура воздуха не зависит от высоты и равна  $t = 0^\circ\text{C}$ .

Решение:

Распределение молекул по высоте определяется распределением Больцмана (3.4.7):

$$n = n_0 \exp\left[-\frac{E_p}{kT}\right] = n_0 \exp\left[-\frac{\mu gh}{RT}\right], \text{ где в нашем случае } \frac{n_0}{n} = 2.$$

Тогда:  $2 = \exp\left[\frac{\mu gh}{RT}\right] \Rightarrow \ln 2 = \frac{\mu gh}{RT} \Rightarrow h = \frac{\ln 2 RT}{\mu g} = 5,5 \text{ км.}$

Ответ:  $h = 5,5 \text{ км.}$

## Задачи

- 6.4.01 В сосуде находится 2,5 г кислорода. Найти число молекул кислорода, скорости которых превышают среднюю квадратичную скорость.
- 6.4.02 Определить изменение показаний барометра  $\Delta P$  при подъеме его на телевизионную башню высотой  $h = 150$  м. Считать, что на поверхности земли ( $h = 0$ ) давление и температура воздуха равны соответственно  $P_0 = 105$  кПа и  $t = 15$  °С. Изменением температуры с высотой пренебречь.
- 6.4.03 Барометр в кабине летящего вертолета показывает давление  $P = 90$  кПа. На какой высоте  $h$  летит вертолет, если на взлетной площадке барометр показывал давление  $P_0 = 100$  кПа? Считать, что температура воздуха не зависит от высоты и равна  $T = 290$  К.
- 6.4.04 Пылинки, взвешенные в воздухе, имеют массу  $m_0 = 10^{-18}$  г. Во сколько раз уменьшится их концентрация  $n$  при увеличении высоты на  $\Delta h = 10$  м? Считать, что температура не зависит от высоты и равна  $T = 300$  К.
- 6.4.05 На какой высоте концентрация атмосферного кислорода  $n$  в два раза меньше его концентрации газа на уровне моря  $n_0$ ? Считать, что температура кислорода не зависит от высоты и равна  $t = 7$  °С.
- 6.4.06 Какая часть молекул идеального газа имеет скорости, отличные от  $V_g/2$  не более чем на 1 % ( $V_g$  – наиболее вероятная скорость)?
- 6.4.07 Какая часть молекул идеального газа имеет скорости, отличные от  $2V_g$  не более чем на 1 % ( $V_g$  – наиболее вероятная скорость)?
- 6.4.08 Какая часть молекул идеального газа имеет скорости, отличные от  $\sqrt{2}V_g$  не более чем на 1 % ( $V_g$  – наиболее вероятная скорость)?
- 6.4.09 При какой температуре  $T$  средняя квадратичная скорость  $V_{\text{ср.кв}}$

молекул азота на  $\Delta V = 50 \text{ м/с}$  больше их наиболее вероятной скорости  $V_{\theta}$ ?

- 6.4.10 Найти среднюю арифметическую  $\langle V \rangle$ , среднюю квадратичную  $V_{\text{ср.кв}}$  и наиболее вероятную  $V_{\theta}$  скорости молекул газа, который при давлении  $P = 40 \text{ кПа}$  имеет плотность  $\rho = 0,3 \text{ кг/м}^3$ .

## 6.5. ЯВЛЕНИЯ ПЕРЕНОСА

### Теоретический минимум

Молекулы газа в процессе своего хаотического движения постоянно испытывают соударения не только со стенками сосуда, но и друг с другом. Длиной свободного пробега  $l$  называют длину пути, пройденного молекулой между двумя последовательными соударениями. Так как молекулы распределены в пространстве беспорядочно, движутся во всевозможных направлениях и с различными скоростями, то величина  $l$  окажется разной для разных молекул. Однако можно найти среднее значение длины свободного пробега  $\langle l \rangle$  молекулы газа для большого числа столкновений и пользоваться этим параметром для характеристики состояния газа.

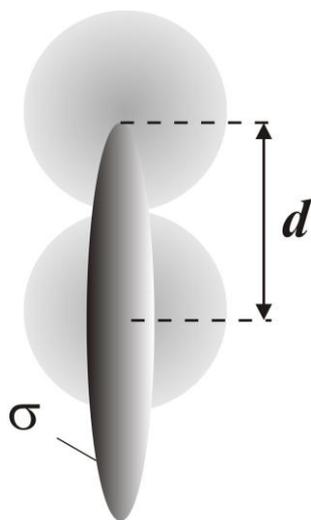


Рис. 6.5.1.

Предположим, что молекулы газа при столкновении ведут себя как упругие шарики, отталкивающиеся только при соприкосновении, когда расстояние между их центрами равно удвоенному радиусу молекулы:  $d = 2r$ . Пусть молекула движется со скоростью, равной средней скорости  $\langle V \rangle$ . Тогда за интервал времени  $t$  соударения с ней испытают молекулы, центры которых оказываются внутри цилиндра, длина образующей которого равна  $L = \langle V \rangle t$ , а площадь основания  $\sigma$  имеет радиус, равный  $d = 2r$  (см. Рис. 3.5.1). Площадь  $\sigma = 4\pi r^2$  называется эффективным сечением соударения.

Если считать остальные молекулы неподвижными, то среднее число соударений  $\langle Z \rangle$ , испытываемых молекулой за время  $t$  можно определить как произведение объема цилиндра  $\sigma \langle V \rangle t$  на концентрацию молекул газа  $n$ . Пусть  $t = 1$  с, тогда среднее число соударений молекулы в единицу времени будет равно:

$$\langle Z \rangle = \sigma \langle V \rangle \cdot n. \quad (6.5.1)$$

Разделив путь, пройденный молекулой за  $t = 1$  с на число столкновений  $\langle Z \rangle$ , испытанных ею за то же время, получим среднюю длину свободного пробега  $\langle l \rangle$ :

$$\langle l \rangle = \frac{L}{\langle Z \rangle} = \frac{\langle V \rangle}{\sigma \langle V \rangle n} = \frac{1}{\sigma n}. \quad (6.5.2)$$

Однако эти формулы нужно скорректировать. При их выводе мы сделали ряд искусственных допущений. Так в действительности, все молекулы движутся, и результат столкновения двух частиц зависит от средней скорости их относительного движения, которая в  $\sqrt{2}$  раз больше, чем  $\langle V \rangle$ . С учетом этого обстоятельства:

$$\langle Z \rangle = \sqrt{2} \sigma \langle V \rangle n, \quad (6.5.3)$$

$$\langle l \rangle = \frac{1}{\sqrt{2} \sigma n}. \quad (6.5.4)$$

Причиной возникновения всех явлений переноса является нарушение равновесия в системе. Система при этом всегда стремится вернуться в равновесное состояние. Такие процессы сопровождаются ростом энтропии. Следовательно, они необратимы. В ходе восстановления равновесия в телах возникают потоки тепла, массы, импульса и т.д. Поэтому соответствующие процессы носят название явлений переноса. Мы рассмотрим три явления переноса – вязкость, теплопроводность и диффузию.

Потоком называется количество какой – либо величины, проходящее в единицу времени через единичную поверхность, ориентированную перпендикулярно направлению переноса. Поток – векторная величина, направление которой указывает направление, в котором осуществляется

перенос вещества, энергии, импульса и т.д.

### 1. Перенос энергии (Теплопроводность).

Теплопроводность – один из видов переноса теплоты (энергии) от более нагретых частей тела к менее нагретым, приводящий к выравниванию температуры.

Допустим, что в некоторой среде вдоль некоей оси  $Z$  существует градиент температуры  $\frac{dT}{dz}$  (см. Рис. 6.5.2).

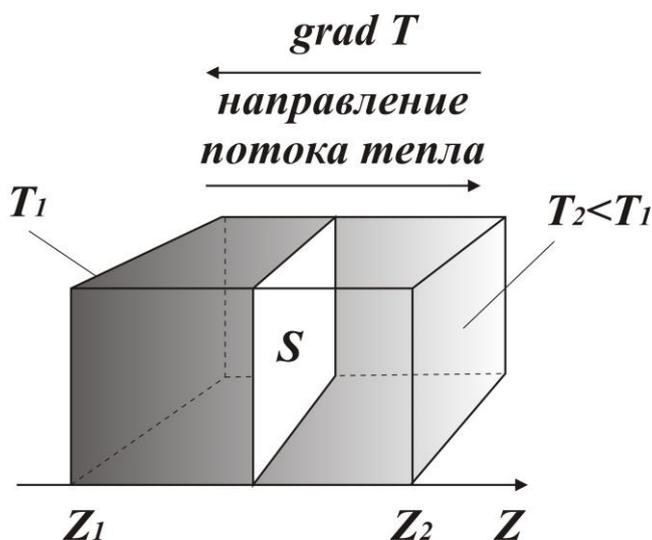


Рис. 6.5.2.

Введем понятие плотности теплового потока  $\dot{j}_Q$  как количества теплоты, переданного в единицу времени через единичную поверхность, ориентированную перпендикулярно вектору градиента температуры. Размерность величины  $\dot{j}_Q$  в системе СИ будет  $Вт / м^2$ .

Если относительное изменение температуры  $T$  на расстоянии средней длины свободного пробега частиц мало, то выполняется эмпирический закон Фурье, согласно которому плотность теплового потока  $\dot{j}_Q$  пропорциональна

градиенту температуры  $\frac{dT}{dz}$  :

$$j_Q = -\lambda \frac{dT}{dz}. \quad (6.5.5)$$

Коэффициент пропорциональности  $\lambda$  зависит от свойств среды и

называется коэффициентом теплопроводности. Можно показать, что:

$$\lambda = \frac{1}{3} \rho \cdot \langle V \rangle \cdot \langle l \rangle \cdot C_p, \quad (6.5.6)$$

где  $\rho$  – плотность,  $C_p$  – удельная теплоемкость газа. Если размерность потока тепла  $\dot{J}_Q$  в системе СИ – это  $\text{Вт}/\text{м}^2$ , то размерность коэффициента теплопроводности будет  $\text{Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})$ .

Знак “–” в формуле (3.5.5) отражает тот факт, что тепло передается от более нагретых частей тела к менее нагретым.

## 2. Перенос вещества (Диффузия).

Диффузия – неравновесный процесс, вызываемый молекулярным тепловым движением и приводящий к выравниванию концентраций внутри каждой фазы вещества.

Так, если создать градиент концентрации молекул  $\frac{dn}{dz}$  в направлении некоей оси  $Z$ , то, вследствие теплового движения молекул, возникнет их поток  $\dot{J}_n$  через перпендикулярную этой оси поверхность (см. Рис. 6.5.3).

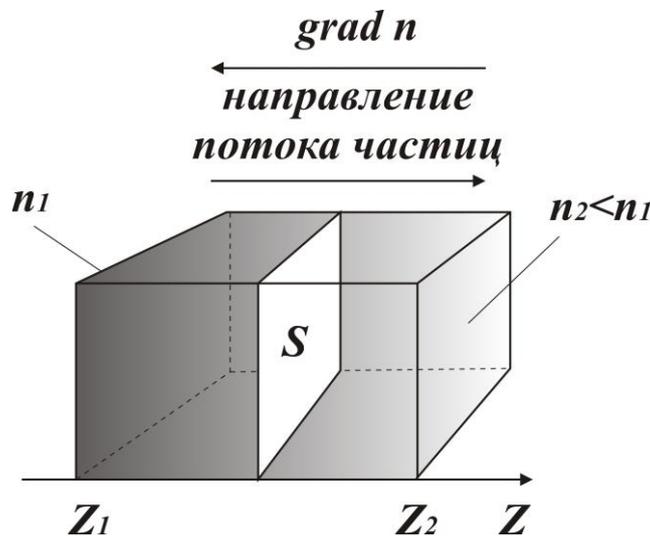


Рис. 6.5.3.

Под потоком  $\dot{J}_n$  в данном случае следует понимать число частиц, прошедших в единицу времени через поверхность (единичной площади), ориентированную перпендикулярно оси  $Z$ . Размерность величины  $\dot{J}_n$  в системе

СИ будет  $(c \cdot m^2)^{-1}$ . Согласно эмпирическому закону Фика:

$$j_n = -D \frac{dn}{dz}. \quad (6.5.7)$$

Поток прямо пропорционален градиенту концентрации с коэффициентом пропорциональности  $D$ , который зависит от свойств вещества и называется коэффициентом диффузии. Можно показать, что:

$$D = \frac{1}{3} \langle V \rangle \cdot \langle l \rangle. \quad (6.5.8)$$

Размерность коэффициента диффузии в системе СИ –  $m^2 / c$ .

Знак “–” в формуле (6.5.7) указывает на то, что поток молекул в ходе диффузии будет направлен в сторону убывания концентрации.

### 3. Перенос импульса.

Рассмотрим газ или жидкость, которые находятся с одной стороны от бесконечной плоской поверхности и занимают полупространство  $Z > 0$  (см. Рис. 6.5.4).

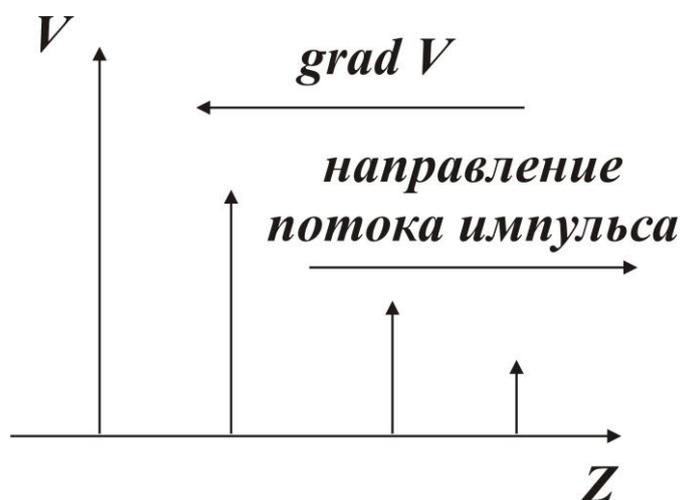


Рис. 6.5.4.

Допустим, поверхность движется со скоростью, которая лежит в плоскости поверхности и равна  $V$ . Частицы газа или жидкости, примыкающие к поверхности, будут вовлечены в движение силами притяжения к частицам поверхности. Поэтому возникнет течение граничащего с поверхностью слоя жидкости. Его скорость будет также равна  $V$ . По мере удаления от поверхности (с ростом  $Z$ ) скорость течения будет убывать, обращаясь в нуль при  $Z \rightarrow \infty$ .

Это означает, что скорость течения является убывающей функцией  $V = V(z)$  расстояния до поверхности, и перенос импульса будет осуществляться в направлении оси  $Z$ . Размерность плотности потока импульса (обозначаемого буквой  $j_p$ ) совпадает с размерностью силы действующей на единицу площади соприкосновения поверхностей. Размерность  $j_p$  в системе СИ будет  $кг / (с^2 \cdot м)$ .

Так же как и при диффузии и теплопроводности, поток импульса зависит от скорости изменения в пространстве скорости течения, и в одномерном случае (Рис. 6.5.4) эта зависимость имеет вид:

$$j_p = -\eta_p \frac{dV}{dz}. \quad (6.5.9)$$

Выражение (6.5.9) известно как закон Ньютона для внутреннего трения. Знак “-” в формуле (6.5.9) указывает на то, что перенос импульса происходит в направлении убывания скорости  $V$ .

Коэффициент  $\eta_p$  называется динамической вязкостью среды. Можно показать, что он равен:

$$\eta_p = \frac{1}{3} \rho \cdot \langle V \rangle \cdot \langle l \rangle, \quad (6.5.10)$$

где  $\rho$  – плотность. Коэффициент  $\eta_p$  является положительной величиной, характеризующей скорость переноса импульса в результате теплового движения, и определяется свойствами среды. Единицей его измерения в системе СИ служит  $кг / с \cdot м$ , а в системе СГС – пуаз (Пз), равный  $г / с \cdot см$ . Так, например, динамическая вязкость дистиллированной воды равна  $1 \text{ сПз}$  (т. е.  $0,01 \text{ Пз}$ ).

Импульс единицы объема газа или жидкости равен произведению плотности  $\rho$  на скорость его перемещения. Поэтому помимо потока импульса рассматривают еще поток скорости течения, определяя его так:

$$j_v = \frac{j_p}{\rho} = -\nu_v \frac{dV}{dz}. \quad (6.5.11)$$

Коэффициент  $\nu_v = \frac{\eta_p}{\rho}$  называется кинематической вязкостью. Единицей

его измерения в системе СИ служит  $m^2/c$ , а в системе СГС – стокс (Ст), равный  $см^2/c$ .

### Примеры решения задач

#### **Задача 1.**

При температуре  $t = 0^\circ C$  и некотором давлении  $P_1$  средняя длина свободного пробега молекул кислорода равна  $\langle l \rangle_1 = 9,5 \cdot 10^{-8}$  м. Чему равно среднее число столкновений в 1 с  $\langle Z \rangle_2$ , если сосуд откачать до давления  $P_2 = 0,01 \cdot P_1$ ? Температура остается неизменной. Молярная масса кислорода равна  $\mu = 32$  кг / кмоль.

Решение:

Совместное применение формул (6.5.3) – (6.5.4) дает нам для среднего числа столкновений в 1 с выражение  $\langle Z \rangle_2 = \langle V \rangle / \langle l \rangle_2$ , где  $\langle V \rangle$  - средняя скорость движения молекул (см. формулу (6.4.4)), а  $\langle l \rangle_2$  – средняя длина свободного пробега при давлении  $P_2$ , (см. формулу (6.5.4)). Из уравнения состояния идеального газа в виде (6.1.3) имеем  $n = P / kT$ . Тогда для давлений  $P_1$  и  $P_2$  средние длины свободного пробега будут равны соответственно:

$$\langle l \rangle_1 = \frac{kT}{\sqrt{2}\sigma P_1} \text{ и } \langle l \rangle_2 = \frac{kT}{\sqrt{2}\sigma P_2}. \quad (6.5.12)$$

Значит:  $\langle l \rangle_2 = \frac{P_1}{P_2} \langle l \rangle_1$ .

Окончательно получим:

$$\langle Z \rangle_2 = \frac{1}{\langle l \rangle_1} \frac{P_2}{P_1} \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}} = 4,5 \cdot 10^7 \text{ с}^{-1}.$$

Ответ:  $\langle Z \rangle_2 = 4,5 \cdot 10^7 \text{ с}^{-1}$ .

#### **Задача 2.**

Эффективный диаметр молекулы азота равен  $d = 3,1 \cdot 10^{-10}$  м. Чему равны коэффициенты диффузии  $D$  и динамической вязкости  $\eta$  азота при нормальных условиях?

Решение:

Молярная масса азота  $M = 28 \cdot 10^{-3}$  кг/моль. Нормальные условия:  
 $T = 273$  К,  $P = 10^5$  Па.

Коэффициент динамической вязкости  $\eta = \frac{1}{3} \rho \cdot \langle V \rangle \cdot \langle l \rangle$  (6.5.10).

Коэффициент диффузии  $D = \frac{1}{3} \langle V \rangle \cdot \langle l \rangle$  (6.5.7). Задача сводится к отысканию  $\langle V \rangle, \langle l \rangle$  и  $\rho$ .

Средняя скорость движения молекул  $\langle V \rangle = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m_0}} = 457$  м/с. Средняя

длина свободного пробега  $\langle l \rangle = \frac{1}{\sqrt{2} \sigma n} = \frac{kT}{\sqrt{2} \pi d^2 P} = 8,72 \cdot 10^{-8}$  м. Плотность

$\rho = \frac{m}{V}$ . Учитывая, что  $PV = \frac{m}{M} RT$ , получим:  $\rho = \frac{PM}{RT} = 1,25$  кг/м<sup>3</sup>. Теперь

подставим эти результаты в формулы для  $\eta$  и  $D$  и получим  
 $\eta = 16,6 \cdot 10^{-6}$  (кг/с·м);  $D = 1358 \cdot 10^{-8}$  (м<sup>2</sup>/с).

Ответ:  $\eta = 16,6 \cdot 10^{-6}$  (кг/с·м);  $D = 1358 \cdot 10^{-8}$  (м<sup>2</sup>/с).

**Задачи**

- 6.5.01 Средняя длина свободного пробега  $\langle l \rangle$  атомов гелия при нормальных условиях равна 180 нм. Определить коэффициент диффузии  $D$  гелия.
- 6.5.02 Коэффициент диффузии  $D$  кислорода при температуре  $T = 273$  К равен 0,19 см<sup>2</sup>/с. Определить среднюю длину свободного пробега  $\langle l \rangle$  молекул кислорода.
- 6.5.03 Найти вязкость  $\eta$  азота при нормальных условиях, если коэффициент диффузии для него равен  $D = 1,42 \cdot 10^{-5}$  м<sup>2</sup>/с.
- 6.5.04 Найти среднюю длину свободного пробега  $\langle l \rangle$  атомов гелия при давлении  $P = 101,3$  кПа и температуре  $t = 0$  °С, если вязкость гелия  $\eta = 1,3 \cdot 10^{-5}$  кг/(с·м).

- 6.5.05 Найти коэффициент диффузии  $D$  и вязкость  $\eta$  воздуха при давлении  $P = 101,3$  кПа и температуре  $t = 10^\circ\text{C}$ . Диаметр молекул принять равным  $d = 0,3$  нм.
- 6.5.06 В колбе объемом  $V = 100$  см<sup>3</sup> находится  $m = 0,5$  г азота. Найти среднюю длину свободного пробега  $\langle l \rangle$  молекул азота при этих условиях. Диаметр молекул принять равным  $d = 3 \cdot 10^{-8}$  см.
- 6.5.07 Найти среднюю длину свободного пробега  $\langle l \rangle$  атомов гелия в условиях, когда его плотность равна  $\rho = 2,1 \cdot 10^{-2}$  кг/см<sup>3</sup>. Диаметр атомов гелия принять равным  $d = 2 \cdot 10^{-8}$  см.
- 6.5.08 При нормальном атмосферном давлении средняя длина свободного пробега молекул азота была равна  $\langle l \rangle = 6 \cdot 10^{-6}$  см. Найти давление  $P$ , при котором средняя длина свободного пробега молекул азота станет равной  $\langle l \rangle = 1$  мм? Считать, что температура поддерживалась постоянной.
- 6.5.09 Найти среднее число соударений в единицу времени  $\langle Z \rangle$  и среднюю длину свободного пробега  $\langle l \rangle$  для молекулы гелия при давлении  $P = 2$  кПа и температуре  $T = 200$  К. Диаметр атомов гелия принять равным  $d = 2 \cdot 10^{-8}$  см.
- 6.5.10 Подсчитать среднее число соударений в единицу времени  $\langle Z \rangle$ , испытываемых молекулой аргона при температуре  $T = 290$  К и давлении  $P = 0,1$  мм. рт. ст. Диаметр атомов аргона принять равным  $d = 2,9 \cdot 10^{-10}$  м. (Учесть, что  $760$  мм. рт. ст. =  $10^5$  Па).

## КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА №4

**Студент должен решить 5 задач того варианта, номер которого совпадает с последней цифрой шифра зачетной книжки студента.**

Вариант	Номер задачи				
1	6.1.01	6.2.01	6.3.01	6.4.01	6.5.01
2	6.1.02	6.2.02	6.3.02	6.4.02	6.5.02
3	6.1.03	6.2.03	6.3.03	6.4.03	6.5.03
4	6.1.04	6.2.04	6.3.04	6.4.04	6.5.04
5	6.1.05	6.2.05	6.3.05	6.4.05	6.5.05
6	6.1.06	6.2.06	6.3.06	6.4.06	6.5.06
7	6.1.07	6.2.07	6.3.07	6.4.07	6.5.07
8	6.1.08	6.2.08	6.3.08	6.4.08	6.5.08
9	6.1.09	6.2.09	6.3.09	6.4.09	6.5.09
10	6.1.10	6.2.10	6.3.10	6.4.10	6.5.10

## **Темы письменных работ (рефератов).**

Студент должен представить письменную работу (реферат) по теме, номер которой совпадает с последней цифрой шифра своей зачетной книжки.

- 1) Уравнение состояния идеального газа.
- 2) Термодинамические процессы. Первое начало термодинамики.
- 3) Цикл Карно. Понятие энтропии.
- 4) Процессы переноса: диффузия, теплопроводность, вязкость.
- 5) Элементы статистической физики: понятие о функциях распределения.

### **СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ:**

1. Савельев И. В. Курс общей физики. В 5 книгах. Книга 3. Молекулярная физика и термодинамика. – 2005 г.
2. Иродов И. Е. Физика макросистем. Основные законы. – 2006 г.
3. Чертов А. Г., Воробьев А. А. Задачник по физике. – 2001 г.
4. Сена Л. А. Единицы физических величин и их размерности. – 1988 г.