Лабораторная работа № 1-03

ИЗУЧЕНИЕ ЗАКОНОВ ДИНАМИКИ ПЛОСКОГО ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА ПРИ ПОМОЩИ МАЯТНИКА МАКСВЕЛЛА

А.А. Зубарев

1. Цель работы

Определение момента инерции, кинематических и энергетических характеристик плоского движения твердых тел на примере маятника Максвелла.

2. Теоретическое введение

2.1. Динамика плоского движения абсолютно твердого тела

Любое плоское движение абсолютно твердого тела (т.е. тела, все точки которого сохраняют неизменное положение относительно друг друга) может быть представлено как совокупность простых движений: *поступательного* и *вращательного*. Плоским движением называется такое движение тела, при котором все его точки перемещаются параллельно некоторой фиксированной плоскости.

Поступательным движением твердого тела называют такое его движение, при котором каждая прямая, соединяющая две любые точки тела, перемещается параллельно самой себе. При поступательном движении смещение все точек тела за любой промежуток времени одинаково, поэтому все его точки имеют в данный момент времени одинаковые скорости и ускорения. Таким образом, зная движение какой-то одной точки, мы можем определить движение всех остальных точек тела. Динамику поступательного движения описывает второй закон Ньютона:

$$\sum \vec{F}_i = m\vec{a}\,. \qquad (1)$$

Вращательным движением называется такое движение, при котором траектории всех точек тела являются концентрическими окружностями с центром на одной прямой, называемой осью вращения. Ось вращения может лежать вне тела или проходить сквозь тело. Вращение тела характеризуется угловой скоростью и угловым ускорением. Причиной, вызывающей вращательное движение тела, является наличие моментов сил, действующих на тело. Моментом силы $\vec{M}$ относительно произвольной точки называется векторное произведение:

$$\vec{M} = \left[\vec{r} \cdot \vec{F}\right], \tag{2}$$

где $\vec{F}$ - действующая сила, $\vec{r}$ - радиус-вектор, характеризующий положение точки приложения силы относительно выбранной произвольной точки.

При вращении твердого тела вокруг неподвижной оси все точки тела совершают *плоское движение*, т.е. перемещаются в параллельных плоскостях, причем линейные скорости и ускорения различных точек тела различны, и тем больше, чем дальше точка отстоит от оси вращения. Угловая же скорость $\vec{\omega}$ при вращении вокруг неподвижной оси одинакова для всех точек тела. Быстрота изменения угловой скорости характеризуется величиной углового ускорения:

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}. \tag{3}$$

Связь между линейным перемещением $\vec{s}$ и угловым перемещением $d\vec{\varphi}$, линейной скоростью $\vec{\mathrm{v}}$ и угловой скоростью $\vec{\omega}$ задается соотношениями:

$$d\vec{s} = \left[d\vec{\varphi} \cdot \vec{r}\right]; \ \vec{\mathrm{v}} = \frac{d\vec{s}}{dt} = \left[\frac{d\vec{\varphi}}{dt} \cdot \vec{r}\right] = \left[\vec{\omega} \cdot \vec{r}\right]. \tag{4}$$

Тангенциальное ускорение $\vec{a_\tau}$ и угловое ускорение $\vec{\varepsilon}$ связаны соотношением:

$$\overrightarrow{a_\tau} = \left[\vec{\varepsilon} \cdot \vec{r}\right]. \tag{5}$$

Связь между угловым ускорением и моментом сил, действующих на тело, определяется основным законом динамики вращательного движения твердого тела вокруг неподвижной оси (оси z):

$$\sum \vec{M}_{iz} = I_z \cdot \vec{\varepsilon} \tag{6}$$

где $\sum \vec{M}_{iz}$ - проекция на ось z моментов всех сил, действующих на тело; $\vec{\varepsilon}$ - угловое ускорение; I_z - момент инерции тела относительно оси z.

Закон (6) аналогичен второму закону динамики для поступательного движения твёрдого тела, в котором вместо силы используется момент силы относительно оси вращения, а вместо линейного ускорения – угловое, при этом момент инерции тела относительно оси вращения является аналогом массы тела.

Момент инерции тела относительно оси вращения зависит от величины массы тела, его формы и размеров, а также выбора оси вращения и от распределения массы тела относительно этой оси. Являясь аналогом массы при поступательном движении, момент инерции есть мера инертности тела при вращательном движении. Всякое тело, независимо от того вращается оно или покоится, обладает определенным моментом инерции относительно любой оси вращения, подобно тому, как тело обладает массой независимо от того, движется оно или покоится. Размерность момента инерции в СИ: $[I] = кг \cdot м^2$.

Вычисление момента инерции тела производится путем интегрирования выражения:

$$I = \int_V r^2 \rho dV , \tag{7}$$

где ρ –плотность вещества в объеме тела dV, находящегося на расстоянии r от оси вращения.

При сложной форме тела и неоднородном распределении его плотности, аналитический расчет величины момента инерции по формуле (7) может оказаться достаточно сложной задачей.

Если определен момент инерции тела I_0 относительно некоторой оси вращения, проходящей через его центр масс, то момент инерции тела I относительно любой другой оси, параллельной данной, определяется согласно *теореме Штейнера* как:

$$I = I_0 + md^2 \quad , \tag{8}$$

где m - масса тела, d - расстояние между осями.

Исходя из сказанного выше, будем представлять плоское движение твердого тела, как совокупность поступательного и вращательного движений относительно оси, проходящей через его центр масс. При этом полная кинетическая энергия тела будет определяться суммой энергии поступательного движения $\frac{1}{2}m\mathrm{v}_0{}^2$ со скоростью, равной скорости центра масс $\vec{\mathrm{v}}_0$, и энергии вращательного движения с угловой скоростью $\vec{\omega}_0$ вокруг оси, проходящей через центр масс тела, и равной $\frac{1}{2}I_0\omega_0{}^2$, где I_0 - момент инерции тела относительно оси вращения:

$$E_к = \frac{m\mathrm{v}_0{}^2}{2} + \frac{I_0\omega_0^2}{2} \quad . \tag{9}$$

2.2. Динамика плоского движения маятника Максвелла

Маятник Максвелла совершает плоское движение под действием трех сил: силы тяжести $m\vec{g}$ и двух сил натяжения нитей $2\vec{T}$, на которых он подвешен. Трением и сопротивлением воздуха пренебрегаем.

Динамика поступательного движения центра масс маятника описывается уравнением:

$$2\vec{T} + m\vec{g} = m\vec{a}. \qquad (10)$$

Динамика вращательного движения вокруг оси, проходящей через центр масс маятника, описывается уравнением:

$$[\vec{r} \cdot 2\vec{T}] = I_0 \vec{\varepsilon}. \qquad (11)$$

Движение маятника Максвелла происходит в вертикальной плоскости. В проекции на вертикальную ось (положительное направление – вниз) уравнение (10) принимает вид:

$$mg - 2T = ma. \qquad (12)$$

В проекции на ось вращения, проходящую через центр масс маятника, уравнение (11) записывается в виде:

$$2T \cdot r = I_0 \cdot \varepsilon. \qquad (13)$$

Если колесо маятника при движении не проскальзывает по нити, то согласно (5): $a = \varepsilon \cdot r$. Решая с учетом этого условия совместно уравнения (12) и (13), получаем ускорение центра масс:

$$a = \frac{mg}{m + \frac{I_0}{r^2}}, \qquad (14)$$

где m - масса маятника; I_0 - момент инерции маятника относительно оси, проходящей через его центр масс; r - плечо действия силы натяжения нити (радиус оси колеса маятника).

Поскольку движение маятника равнопеременное, скорость его центра масс v_0 как функции времени t (при начальной скорости, равной нулю), есть:

$$\mathrm{v}_0(t) = at = \frac{mg}{m + \frac{I_0}{r^2}} t \ . \qquad (15)$$

Соответственно величина перемещения центра масс $s(t)$ будет:

$$s(t) = \frac{at^2}{2} = \frac{mg}{2\left(m + \frac{I_0}{r^2}\right)} t^2 . \qquad (16)$$

При этом связь между s и v_0 имеет простой вид:

$$\mathrm{v}_0 = \frac{2s}{t} . \qquad (17)$$

Полная механическая энергия маятника Максвелла представляет собой сумму кинетической и потенциальной энергий. Если принять за начало отсчета потенциальной энергии положение маятника в верхней точке, то по мере его опускания потенциальная энергия становится отрицательной. Полная механическая энергия равна:

$$E = -E_n + \frac{1}{2} m\mathrm{v}_0^2 + \frac{1}{2} I_0 \omega_0^2 = -mgs + \frac{1}{2}\left(m + \frac{I_0}{r^2}\right)\mathrm{v}_0^2 , \qquad (18)$$

где потенциальная энергия

$$E_{\text{п}} = -mgs ; \qquad (19)$$

кинетическая энергия поступательного движения центра масс -

$$E_{к}^{пост} = \frac{1}{2} m \mathrm{v}_0{}^2 = \frac{2ms^2}{t^2}; \qquad (20)$$

кинетическая энергия вращательного движения вокруг оси, проходящий через центр масс-

$$E_{к}^{вращ} = \frac{1}{2} \mathrm{I}_0 \omega_0{}^2 = \frac{1}{2} \frac{I_0 \mathrm{v}_0{}^2}{r^2} = \frac{2 I_0 s^2}{r^2 t^2} \ . \qquad (21)$$

При движении маятника Максвелла от верхнего положения к основанию происходит переход потенциальной энергии в кинетическую. Если не учитывать работу сил сопротивления воздуха (по причине ее малости), то выполняется закон сохранения механической энергии: $E = const$, в нашем случае: $E=0$.

3. Описание экспериментальной установки

Общий вид установки представлен на рис.1.

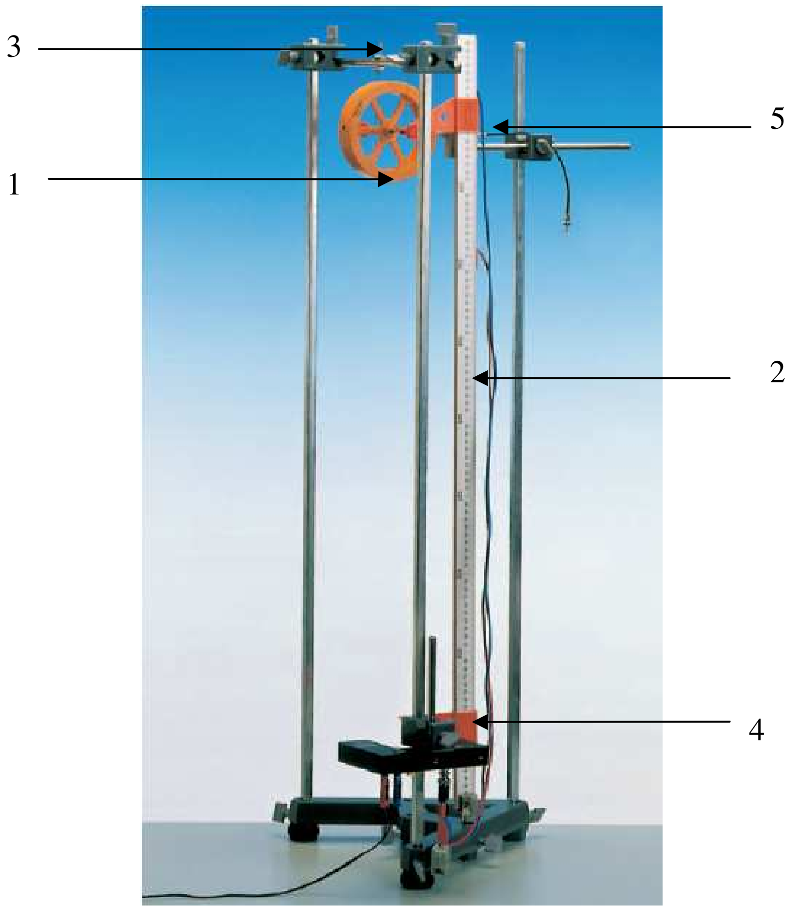

Рис.1. Общий вид экспериментальной установки

Основание, на котором подвешен маятник Максвелла *1,* оснащено тремя регулирующими винтами, что позволяет выравнивать прибор. К основанию прикреплены три поддерживающих стержня и линейка *2* длиной 1 м с миллиметровой шкалой. С помощью юстировочного винта *3* в верхней части поддерживающего устройства ось колеса маятника устанавливается в горизонтальном положении. Передвижные флажки *4* и *5* отмечают положение оси маятника в верхней и нижней точках движения. Нить, намотанная на ось колеса, при движении маятника вниз сматывается. Отсчет пройденного колесом расстояния производится по миллиметровой шкале линейки и соответствует положению оси вращения в момент фиксации времени падения. Отсчет времени движения производится по секундомеру.

Таблица 1

Технические данные приборов

№№ п/п	Название прибора	Пределы измерений	Число делений	Цена деления	Класс точности	Абсолютная приборная погрешность
1	Метрическая линейка					
2	Ручной секундомер					

4. Порядок выполнения работы

Лабораторную работу следует проводить строго соблюдая правила техники безопасности и охраны труда, установленные на рабочем месте студента в лаборатории.

4.1. Отрегулируйте горизонтальное положение оси колеса маятника Максвелла в свободном состоянии при помощи регулировочного винта на стержне штатива.

4.2. Установите в начальном свободном положении нижний флажок на уровне оси колеса снизу.

4.3. Установите верхний флажок на расстоянии s_1 (в соответствии с индивидуальным заданием) от нижнего флажка.

4.4. Намотайте нити на ось колеса аккуратно, виток к витку, до тех пор, пока ось маятника не поднимется до верхнего флажка. Намотка должна быть направлена внутрь, а плотность намотки – одинаковая по обеим сторонам.

4.5. Отпустите маятник и одновременно запустите секундомер. Маятник начнет движение, секундомер – отсчет времени. Отключите секундомер, когда ось маятника достигнет нижнего флажка.

4.6. Измерение времени t при фиксированном s проведите не менее 5 раз, рассчитайте среднее время $\bar{t}$. Результаты измерений занесите в таблицу 2.

4.7. Повторите измерения с другими расстояниями s согласно индивидуальному заданию. Число выбранных расстояний s должно быть не менее 7. Результаты занесите в таблицу 2.

Таблица 2

Результаты измерений времени t для различных расстояний s

Время	s_1, м	s_2, м	s_3, м	…	s_7, м
t_1, с					
t_2, с					
…					
t_5, с					
Среднее значение $\bar{t}$, с	$\bar{t}_{s1}$	$\bar{t}_{s2}$	$\bar{t}_{s3}$	…	$\bar{t}_{s7}$
$\bar{t}^2$, с^2	$(\bar{t}_{s1})^2$	$(\bar{t}_{s2})^2$	$(\bar{t}_{s3})^2$		$(\bar{t}_{s7})^2$

5. Обработка результатов эксперимента

5.1. Определение момента инерции маятника Максвелла

5.1.1. Запишите величину массы маятника m = 0,436 кг и радиуса оси колеса r = 2,5 мм.

5.1.2. Из выражения (14) получите расчетную формулу для момента инерции I_0:

$$I_0 = \left(\frac{g}{a} - 1\right) m r^2 .$$

5.1.3. Для определения a постройте график s от квадрата времени - $s\left(t^2\right)$.

Из формулы (16) $$a = \frac{2s}{t^2} .$$

Следовательно, среднее значение $\overline{a}$: $$\overline{a} = \frac{2\Delta s}{\Delta t^2} ,$$

где Δs - приращение функции и Δt^2 - приращение аргумента из графика $s\left(t^2\right)$.

5.1.4. Вычислите среднее значение $\overline{I}_0$:

$$\overline{I}_0 = \left(\frac{g}{\overline{a}} - 1\right) m r^2$$

5.1.5. Для минимального значения s и $\bar{t}$ рассчитайте систематическую погрешность определения a по формуле:

$$\delta_a = \left(\frac{\Delta s}{s} + 2\frac{\Delta t}{\bar{t}}\right) \cdot 100\% \ (\%).$$

Рассчитайте Δt по формуле $\Delta t = \sigma_{\bar{t}} + \Delta t_{\text{приб}}$. Для расчета воспользуйтесь данными таблиц 1 и 2.

5.1.6. Найдите абсолютную погрешность определения a:

$$\Delta a = \frac{\overline{a} \cdot \delta_a}{100\%} .$$

5.1.7. Вычислите систематическую абсолютную погрешность ΔI_0 по формуле:

$$\Delta I_0 = \left|\frac{\partial I_0}{\partial a}\right| \Delta a + \left|\frac{\partial I_0}{\partial m}\right| \Delta m + \left|\frac{\partial I_0}{\partial r}\right| \Delta r$$

Для этого используйте следующие соотношения:

$$\left|\frac{\partial I_0}{\partial a}\right| = \frac{g m r^2}{\overline{a}^2} ;$$

$$\left|\frac{\partial I_0}{\partial m}\right| = \left(\frac{g}{\bar{a}} - 1\right) r^2 ;$$

$$\left|\frac{\partial I_0}{\partial r}\right| = 2\left(\frac{g}{\bar{a}} - 1\right) m r^2 .$$

5.1.8. Окончательный результат запишите в СИ:

$$I_0 = \left(\bar{I}_0 \pm \Delta I_0\right) \text{ (кг}\cdot\text{м}^2\text{)}.$$

5.1.9. Оцените относительную погрешность косвенного определения I_0 по формуле:

$$\delta_{I_0} = \frac{\Delta I_0}{\bar{I}_0} \cdot 100\%$$

Примечание. Число значащих цифр при записи результата ограничивается первой значащей цифрой погрешности.

5.2. Определение потенциальной энергии $E_п$ маятника Максвелла как функции пройденного расстояния *s*

5.2.1. Запишите величину массы маятника m = 0,436 кг.

5.2.2. Согласно (19) выражение для потенциальной энергии маятника:

$$E_п = -mgs .$$

Для каждого значения s найдите величину $E_п$.

5.2.3. Для минимального значения s рассчитайте относительную систематическую погрешность определения $E_п$ по формуле:

$$\delta_{E_п} = \left(\frac{\Delta m}{m} + \frac{\Delta s}{s}\right) \cdot 100\%$$

Для расчета воспользуйтесь данными таблиц 1 и 2.

5.2.4. Оцените абсолютную погрешность косвенного определения $E_п$:

$$\Delta E_п = \frac{E_п \cdot \delta_{E_п}}{100\%} .$$

5.2.5. Окончательный результат запишите в СИ:

$$\left(E_{\text{п}} \pm \Delta E_{\text{п}}\right)(\text{Дж}); \qquad \delta_{E_{\text{п}}} \ (\%)$$

Результаты расчетов занесите в табл. 3.

Таблица 3

Результаты определения механической энергии маятника Максвелла

s, м	$\left(E_{\text{п}} \pm \Delta E_{\text{п}}\right)$, Дж	$(E_{к}^{пост} \pm \Delta E_{к}^{пост})$, Дж	$\left(E_{к}^{вращ} \pm \Delta E_{к}^{вращ}\right)$, Дж	$(E = E \pm \Delta E)$, Дж
s_1				
s_2				
…				
s_7				

Примечание. Число значащих цифр при записи результата ограничивается первой значащей цифрой погрешности.

5.3. Определение кинетической энергии поступательного движения центра масс маятника Максвелла как функции пройденного расстояния *s* и времени *t*

5.3.1. Запишите величину массы маятника m = 0,436 кг.

Воспользовавшись выражением (20) для кинетической энергии поступательного движения центра масс маятника и данными таблицы 2 для s и $\bar{t}$, рассчитайте $E_{\text{к}}^{\text{пост}}$ по формуле:

$$E_{\text{к}}^{\text{пост}} = \frac{2ms^2}{\bar{t}^2}$$

Результаты занесите в таблицу 3.

5.3.2. Для минимального значения s и $\bar{t}$, рассчитайте относительную систематическую погрешность определения $E_{\text{к}}^{\text{пост}}$ по формуле:

$$\delta_{E_к^{пост}} = \left(\frac{\Delta m}{m} + \frac{2\Delta s}{s} + \frac{2\Delta t}{\bar{t}} \right) \cdot 100\%$$

Рассчитайте Δt по формуле: $\Delta t = \sigma_{\bar{t}} + \Delta t_{\text{приб}}$. Для расчета воспользуйтесь данными таблиц 1 и 2.

5.3.3. Оцените абсолютную погрешность косвенного определения $E_{\text{к}}^{\text{пост}}$:

$$\Delta E_к^{пост} = \frac{E_к^{пост} \delta_{E_к^{пост}}}{100\%}.$$

5.3.4. Окончательный результат запишите в СИ:

$$(E_к^{пост} \pm \Delta E_к^{пост}) \text{ (Дж)}; \quad \delta_{E_к^{пост}} \quad (\%).$$

Результаты расчетов занесите в табл. 3.

Примечание. Число значащих цифр при записи результата ограничивается первой значащей цифрой погрешности.

5.4. Определение кинетической энергии вращательного движения маятника Максвелла как функции пройденного расстояния *s*

5.4.1. Запишите величину массы маятника m = 0,436 кг. Рассчитайте $\bar{a}$ и Δa согласно пунктам 5.1.3 , 5.1.5 и 5.1.6.

5.4.2. Воспользовавшись выражениями (21), (14) и (16) получите расчетную формулу для кинетической энергии вращательного движения $E_{\text{к}}^{\text{вращ}}$:

$$E_{\text{к}}^{\text{вращ}} = (g - \bar{a})ms.$$

Рассчитайте $E_{\text{к}}^{\text{вращ}}$ для каждого s и результаты занесите в таблицу 3.

5.4.3. Для минимального значения s, рассчитайте относительную систематическую погрешность определения $E_{\text{к}}^{\text{вращ}}$ по формуле:

$$\delta_{E_к^{вращ}} = \left(\frac{\Delta a}{\bar{a}} + \frac{\Delta m}{m} + \frac{\Delta s}{s} \right) \cdot 100\%$$

5.4.4. Оцените абсолютную погрешность косвенного определения $E_{\text{к}}^{\text{вращ}}$:

$$\Delta E_{к}^{вращ} = \frac{E_{к}^{вращ} \cdot \delta_{E_{к}^{вращ}}}{100\%}.$$

5.4.5. Окончательный результат запишите в СИ:

$$\left(E_{к}^{вращ} \pm \Delta E_{к}^{вращ}\right) \text{ (Дж)}; \quad \delta_{E_{к}^{вращ}} \text{ (\%)}.$$

Результаты расчетов занесите в табл. 3.

Примечание. Число значащих цифр при записи результата ограничивается первой значащей цифрой погрешности.

5.5 Определение полной механической энергии маятника Максвелла

5.5.1. Воспользовавшись данными табл. 3 рассчитайте значения полной механической энергии E маятника по формуле:

$$E = -\ E_{п} + E_{к}^{пост} + E_{к}^{вращ}$$

5.5.2. Значения E в виде ($E = E \pm \Delta E$) занесите в таблицу 3. Убедитесь в выполнении закона сохранения механической энергии: $E = const = 0$.

6. Библиографический список

а) основная:

1. *Савельев И.В.* Курс общей физики. Кн.1- М.: АСТ Астрель. 2006. с.с. 36-51, 79-112, 125-128, 153-169, 176-190.

2. *Капуткин Д.Е., Шустиков* А.Г. Физика. Обработка результатов измерений при выполнении лабораторных работ. (№ 805). М.: МИСиС. «Учеба». 2007.-108с.

б) дополнительная:

3. *Наими Е.К.* Маятник Максвелла. «Известия ВУЗов». Физика. 1979. №11. с.120-122.

7. Контрольные вопросы

1. Что называется плоским движением твердого тела? Как записывается основное уравнение динамики вращательного движения твердого тела вокруг неподвижной оси?

2. Что такое момент инерции тела? От чего он зависит?

3. Из чего складывается полная кинетическая энергия твердого тела при плоском движении?

4. Как записывается закон сохранения механической энергии при плоском движении на примере маятника Максвелла?

8. Индивидуальные задания

Задание 1.

1. Исходя из уравнений плоского движения маятника Максвелла, получите выражения для определения момента инерции маятника I_0 и скорости поступательного движения его центра масс $v_0(t)$.

2. Произведите серию измерений времени движения маятника Максвелла t как функцию пройденного расстояния s, меняя s от 0,90 м до 0,60 м с шагом 0,05 м. Результаты эксперимента занесите в таблицу 2.

3. Определите момент инерции маятника I_0 согласно пункту 5.1.

Задание 2.

1. Получите выражения для потенциальной и кинетической энергии маятника Максвелла, исходя из уравнений плоского движения.

2. Произведите серию измерений времени движения маятника Максвелла как функцию пройденного расстояния s, меняя s от 0,90 м до 0,60 м с шагом 0,05 м. Результаты занесите в таблицу 2.

3. Определите потенциальную энергию, кинетическую энергию поступательного и вращательного движения центра масс и полную энергию маятника согласно п.п. 5.2 - 5.5. Проверьте выполнение закона сохранения механической энергии.

Задание 3.

1.Составьте уравнение закона сохранения механической энергии для маятника Максвелла.

2. Произведите серию измерений времени движения маятника Максвелла t как функцию пройденного расстояния s, меняя s от 0,55 м до 0,25 м с шагом 0,05 м. Результаты эксперимента занесите в таблицу 2.

3. Определите момент инерции маятника I_0 согласно пункту 5.1.

Задание 4.

1. Получите выражение для изменения кинетической энергии вращательного движения твердого тела вокруг фиксированной оси, если момент инерции тела относительно этой оси I, если тело вращается под действием постоянного момента силы $\overrightarrow{M}$, приложенного на расстоянии $\vec{r}$ от оси вращения.

2. Произведите серию измерений времени движения маятника Максвелла как функцию пройденного расстояния s, меняя s от 0,55 м до 0,25 м с шагом 0,05 м. Результаты занесите в таблицу 2.

3. Определите потенциальную энергию, кинетическую энергию поступательного и вращательного движения центра масс и полную энергию маятника согласно п.п. 5.2 - 5.5. Проверьте выполнение закона сохранения механической энергии.