

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«Национальный исследовательский технологический университет «МИСИС»
Институт базового образования
КАФЕДРА МАТЕМАТИКИ

УТВЕРЖДАЮ:



Проректор по образованию

А.А. Волков

«19» марта 2023 г.

Дополнительная профессиональная программа
(повышение квалификации)

**Методика преподавания математики (углубленный уровень) в 10-11 классах
(Инженерный класс в московской школе)**

Разработчики курса:

Адигамов Аркадий Энгелевич, к.ф.-м.-н.,
доцент кафедры математики
Плужникова Елена Леонидовна, старший
преподаватель кафедры математики
Флорова Ирина Анатольевна, старший
преподаватель кафедры математики

Москва, 2023

Раздел 1. «Характеристика программы»

1.1 Цель реализации программы

Цель реализации программы - совершенствование профессиональных компетенций слушателей в области методики преподавания математики (углубленный уровень) в 10-11 классах проекта «Инженерный класс в московской школе»

1.2 Совершенствуемые/формируемые компетенции

№ п/п	Компетенции	Направление подготовки 44.03.01 Педагогическое образование
		Бакалавриат
		Код компетенции
1.	Способен осуществлять педагогическую деятельность на основе специальных научных знаний	ОПК-8

1.3 Планируемые результаты обучения

№ п/п	Знать – уметь	Направление подготовки 44.03.01 Педагогическое образование
		Бакалавриат
		Код компетенции
1.	<p>Знать:</p> <ul style="list-style-type: none"> - способы решения уравнений, неравенств, систем уравнений и неравенств с параметрами высокого уровня сложности по математике; - способы решения заданий повышенного уровня сложности экономического содержания, задач на оптимальный выбор с построением математических моделей; - способы решения заданий по стереометрии повышенного уровня сложности по математике. - основные понятия аналитической геометрии в пространстве. <p>Уметь:</p> <ul style="list-style-type: none"> - идентифицировать тип конкретной задачи и определять соответствующие технологии ее решения; - решать задания с параметрами с развернутым ответом высокого уровня сложности по математике; - применять элементы векторной алгебры и аналитической геометрии при доказательстве утверждений и при решении заданий по стереометрии с развернутым ответом повышенного уровня 	ОПК-8

	<p>сложности;</p> <p>- строить и исследовать математические модели при решении задач экономического содержания, задач на оптимальный выбор с развернутым ответом повышенного уровня сложности.</p>	
2.	<p>Знать:</p> <p>- критерии определения уровня сложности заданий по алгебре и геометрии;</p> <p>- методику составления дифференцированных по уровням сложности диагностических работ по темам алгебры и геометрии.</p> <p>Уметь:</p> <p>составлять и решать дифференцированные по уровням сложности диагностические работы по темам алгебры и геометрии в соответствии с критериями.</p>	ОПК-8

1.4 Категория обучающихся: уровень образования – высшее образование, область профессиональной деятельности – обучение математике на уровне среднего общего образования в общеобразовательной организации.

1.5 Форма обучения: очная

1.6 Режим занятий: продолжительность 1-го занятия составляет 2 а.ч., не менее 3-4 занятий в неделю

1.7 Трудоемкость программы: 72 часа, в том числе 43 часа аудиторной работы, включая итоговую аттестацию, 29 часов самостоятельной работы слушателей

Раздел 2 «Содержание программы»

2.1 Учебный план

№ п/п	Наименование разделов/ модулей, тем	Всего ауд. часов	Виды аудит. учебных занятий, учебных работ		Внеаудит. работа		Формы контроля	Трудоемкость
			Лекции	Практ. занятия	Сам. работа			
1	2	3	4	5	6	7	8	
	Входная практическая работа	2		2		Практическая работа	2	
1	Раздел 1. Решение уравнений, неравенств, систем уравнений и неравенств высокого уровня сложности с развернутым ответом	18	8	10	14		32	
1.1	Решение линейных и квадратных уравнений, содержащих параметры	4	2	2	2		6	
1.2	Решение линейных и квадратных неравенств, содержащих параметры	3	1	2	4	Контрольная работа №1	7	
1.3	Решение уравнений и неравенств с параметрами с применением графического подхода	4	2	2	2	Контрольная работа №2	6	
1.4	Решение уравнений с параметрами, содержащих неизвестную под знаком абсолютной величины	4	2	2	2	Контрольная работа №3	6	
1.5	Решение неравенств с параметрами, содержащих неизвестную под знаком абсолютной величины	3	1	2	4	Контрольная работа №4	7	
	Раздел 2. Решение заданий по стереометрии повышенного уровня сложности с развернутым ответом	12	4	8	8		20	
2.1	Решение задач по нахождению углов между прямыми, между прямой и плоскостью, между плоскостями с применением координатного метода	6	2	4	4	Контрольная работа №5	10	
2.2	Решение задач по нахождению	6	2	4	4	Контрольная	10	

	расстояний от точки до прямой, от точки до плоскости, расстояний между прямыми, между прямой и плоскостью, между плоскостями с применением координатного метода					работа №6	
	Раздел 3. Задания экономического содержания и на оптимальный выбор	6	2	4	3		9
3.1	Решение задач экономического содержания, задач на оптимальный выбор, относящихся к заданиям повышенного уровня сложности с развернутым ответом	6	2	4	3		9
	Раздел 4. Диагностические работы	3	1	2	4		7
4.1	Составление дифференцированных по уровню сложности диагностических работ по темам алгебры и геометрии	3	1	2	4	Проект	7
	Выходное (итоговое) тестирование	2		2		Итоговый тест	2
	Итоговая аттестация					По совокупности выполненных контрольных работ №№1-6, выходного (итогового) тестирования и проекта	
	Итого	43	15	28	29		72

2.2 Календарный учебный график

Наименование раздела, темы	Объем нагрузки	Учебные недели								
		1 неделя	2 неделя	3 неделя	4 неделя	5 неделя	6 неделя	7 неделя	8 неделя	9 неделя
Входная практическая работа	2	2								
Раздел 1. Решение уравнений, неравенств, систем уравнений и неравенств высокого уровня сложности с развернутым ответом, 1.1 Решение линейных и квадратных уравнений, содержащих параметры	6	6								
Раздел 1. Решение уравнений, неравенств, систем уравнений и неравенств высокого уровня сложности с развернутым ответом, 1.2 Решение линейных и квадратных неравенств, систем неравенств, содержащих параметры	7		7							
Раздел 1. Решение уравнений, неравенств, систем уравнений и неравенств высокого уровня сложности с развернутым ответом, 1.3 Решение уравнений и неравенств с параметрами с применением графического подхода	6		1	5						
Раздел 1. Решение уравнений, неравенств, систем уравнений и неравенств высокого уровня сложности с развернутым ответом, 1.4 Решение уравнений с параметрами, содержащих неизвестную под знаком абсолютной величины	6			3	3					
Раздел 1. Решение уравнений, неравенств, систем уравнений и неравенств высокого уровня сложности с развернутым ответом, 1.5 Решение неравенств с параметрами, содержащих неизвестную под знаком абсолютной величины	7				5	2				
Раздел 2. Решение заданий по стереометрии повышенного уровня сложности с развернутым ответом, 2.1 Решение задач по нахождению углов между прямыми, между прямой и плоскостью, между плоскостями с применением координатного метода	10					6	4			
Раздел 2. Решение заданий по стереометрии повышенного уровня сложности с развернутым ответом, 2.2 Решение задач по нахождению расстояний от точки до прямой, от точки до плоскости, расстояний между прямыми, между прямой и	10						4	6		

плоскостью, между плоскостями с применением координатного метода										
Раздел 3. Задания инженерно-технического содержания и на оптимальный выбор, 3.1 Решение задач экономического содержания, задач на оптимальный выбор, относящихся к заданиям повышенного уровня сложности с развернутым ответом	9							2	7	
Раздел 4. Диагностические работы, 4.1 Составление дифференцированных по уровню сложности диагностических работ по темам алгебры и геометрии	7								1	6
Выходное тестирование	2									2

2.4 Рабочая программа

№ п/п	Виды учебных занятий	Содержание
1	2	3
Входная практическая работа	Практическое занятие, 2 часа	Выполнение «Практической работы» с целью определения уровня сформированности компетенций ОПК-8 и выявления проблемных зон
Раздел 1. Решение уравнений, неравенств, систем уравнений и неравенств высокого уровня сложности с развернутым ответом		
Тема 1.1 Решение линейных и квадратных уравнений и систем уравнений, содержащих параметры	Лекция, 2 часа	Особенности заданий с параметрами. Уравнения с параметрами: линейные, квадратные, системы уравнений. Требования к оформлению решения заданий высокого уровня сложности с развернутым ответом
	Практическое занятие, 2 часа	Цель: формирование умений: решать задания с параметрами с развернутым ответом высокого уровня сложности по математике; идентифицировать тип конкретной задачи и определять технологии ее решения; составлять дифференцируемые по уровням сложности фрагменты диагностической работы, на примере решаемых заданий – уравнения и системы уравнений с параметрами. Индивидуальная работа слушателей: решение линейных и квадратных уравнений, систем уравнений с параметрами, относящихся к заданиям высокого уровня сложности. Работа в малых группах: проектирование заданий диагностической работы по теме «Решение линейных и квадратных уравнений и систем уравнений, содержащих параметры» раздела 1. Совместное подведение итогов работы.

	Самостоятельная работа, 2 часа	Проектирование заданий проекта: разработка заданий диагностических работ базового и продвинутого уровней сложности и их развернутое решение по теме «Решение линейных и квадратных уравнений и систем уравнений, содержащих параметры» раздела 1
Тема 1.2 Решение линейных и квадратных неравенств, систем неравенств, содержащих параметры	Лекция, 1 час	Особенности решения неравенств с параметрами. Линейные, квадратные неравенства, системы неравенств с параметрами
	Практическое занятие, 2 часа	Цель: формирование умений: решать задания с параметрами с развернутым ответом высокого уровня сложности по математике; идентифицировать тип конкретной задачи и определять технологии ее решения; составлять дифференцируемые по уровням сложности фрагменты диагностической работы, на примере решаемых заданий – неравенства и системы неравенств с параметрами Индивидуальная работа слушателей: решение линейных, квадратных неравенств, систем неравенств с параметрами, относящихся к заданиям высокого уровня сложности. Работа в малых группах: проектирование заданий диагностической работы по теме «Решение линейных и квадратных неравенств, систем неравенств, содержащих параметры» раздела 1. Совместное подведение итогов работы.
	Самостоятельная работа, 4 часа	Проектирование заданий проекта: разработка заданий диагностических работ базового и продвинутого уровней сложности и их развернутое решение по теме «Решение линейных и квадратных неравенств, систем неравенств, содержащих параметры» раздела 1. Контрольная работа №1 по темам 1.1 и 1.2 раздела 1.
Тема 1.3 Решение уравнений и неравенств с параметрами с применением графического подхода	Лекция, 2 часа	Графический подход к решению заданий с параметрами. Системы координат xOy , xOa . Графическое решение уравнений и неравенств с параметрами
	Практическое занятие, 2 часа	Цель: формирование умений: решать задания с параметрами с применением графического подхода; идентифицировать тип конкретной задачи и определять технологии ее решения; составлять дифференцируемые по уровням сложности фрагменты диагностической работы, на примере решаемых заданий – графический подход для заданий с параметром. Индивидуальная работа слушателей: графическое решение уравнений и неравенств с параметрами, относящихся к заданиям высокого уровня сложности

		Работа в малых группах: проектирование заданий диагностической работы по теме «Решение уравнений и неравенств с параметрами с применением графического подхода» раздела 1. Совместное подведение итогов работы.
	Самостоятельная работа, 2 часа	Проектирование заданий проекта: разработка заданий диагностических работ базового и продвинутого уровней сложности и их развернутое решение по теме «Решение уравнений и неравенств с параметрами с применением графического подхода» раздела 1. Контрольная работа №2 по теме 1.3 «Решение уравнений и неравенств с параметрами с применением графического подхода» раздела 1.
Тема 1.4 Решение уравнений с параметрами, содержащих неизвестную под знаком абсолютной величины	Лекция, 2 часа	Особенности решения заданий, содержащих неизвестную под знаком абсолютной величины. Уравнения с параметрами, содержащие неизвестную под знаком абсолютной величины
	Практическое занятие, 2 часа	Цель: формирование умений: решать задания с параметрами с применением графического подхода; идентифицировать тип конкретной задачи и определять технологии ее решения; составлять дифференцируемые по уровням сложности фрагменты диагностической работы, на примере решаемых заданий – уравнения, содержащие неизвестную под знаком абсолютной величины. Индивидуальная работа слушателя: аналитическое и графическое решение уравнений с параметрами, содержащих неизвестную под знаком абсолютной величины и относящихся к заданиям высокого уровня сложности. Работа в малых группах: проектирование заданий диагностической работы по теме «Решение уравнений с параметрами, содержащих неизвестную под знаком абсолютной величины» раздела 1. Совместное подведение итогов работы.
	Самостоятельная работа, 2 часа	Отработка навыков аналитического и графического решения уравнений с параметрами, содержащих неизвестную под знаком абсолютной величины и относящихся к заданиям высокого уровня сложности. Контрольная работа № 3 по теме 1.4. Проектирование заданий проекта: разработка заданий диагностических работ базового и продвинутого уровней сложности и их развернутое решение по теме «Решение уравнений с параметрами, содержащих неизвестную под знаком абсолютной величины» раздела 1.
Тема 1.5 Решение неравенств с	Лекция, 1 час	Неравенства с параметрами, содержащие неизвестную под знаком абсолютной величины

параметрами, содержащих неизвестную под знаком абсолютной величины	Практическое занятие, 2 часа	<p>Цель: формирование умений: решать задания с параметрами с применением графического подхода; идентифицировать тип конкретной задачи и определять технологии ее решения; составлять дифференцируемые по уровням сложности фрагменты диагностической работы, на примере решаемых заданий – неравенства, содержащие неизвестную под знаком абсолютной величины</p> <p>Индивидуальная работа слушателя: аналитическое и графическое решение неравенств с параметрами, содержащих неизвестную под знаком абсолютной величины и относящихся к заданиям высокого уровня сложности.</p> <p>Работа в малых группах: проектирование заданий диагностической работы по теме «Решение неравенств с параметрами, содержащих неизвестную под знаком абсолютной величины» раздела 1. Совместное подведение итогов работы.</p>
	Самостоятельная работа, 4 часа	<p>Отработка навыков аналитического и графического решения неравенств высокого уровня сложности с параметрами, содержащих неизвестную под знаком абсолютной величины</p> <p>Контрольная работа № 4 по теме 1.5</p> <p>Проектирование заданий проекта: разработка заданий диагностических работ базового и продвинутого уровней сложности и их развернутое решение по теме «Решение неравенств с параметрами, содержащих неизвестную под знаком абсолютной величины» раздела 1.</p>
Раздел 2. Решение заданий по стереометрии повышенного уровня сложности с развернутым ответом		
Тема 2.1 Решение задач нахождения углов между прямыми, между прямой и плоскостью, между плоскостями с применением координатного метода	Лекция, 2 часа	Декартова прямоугольная система координат. Векторы в пространстве. Скалярное, векторное и смешанное произведение векторов. Уравнение плоскости, уравнения прямой в пространстве. Угол между двумя прямыми, между двумя плоскостями, между прямой и плоскостью. Требования к оформлению решения заданий повышенного уровня сложности с развернутым ответом
	Практическое занятие, 4 часа	Цель: формирование умений: применять элементы векторной алгебры и аналитической геометрии при доказательстве утверждений и при решении заданий по стереометрии с развернутым ответом повышенного уровня сложности; составлять дифференцируемые по уровням сложности фрагменты диагностической работы, на примере решаемых заданий – применение

		<p>координатного метода в задачах стереометрии на нахождение углов.</p> <p>Индивидуальная работа слушателя: решение задач повышенного уровня сложности на вычисление углов между двумя прямыми, между двумя плоскостями, между прямой и плоскостью координатным методом.</p> <p>Работа в малых группах: проектирование заданий диагностической работы по теме «Решение задач нахождения углов между прямыми, между прямой и плоскостью, между плоскостями с применением координатного метода» раздела 2.</p> <p>Совместное подведение итогов работы.</p>
	Самостоятельная работа, 4 часа	<p>Совершенствование навыков решения задач повышенного уровня сложности на вычисление углов между двумя прямыми, между двумя плоскостями, между прямой и плоскостью координатным методом.</p> <p>Контрольная работа № 5 по теме 2.1.</p> <p>Проектирование заданий проекта: разработка заданий диагностических работ базового и продвинутого уровней сложности и их развернутое решение по теме «Решение задач нахождения углов между прямыми, между прямой и плоскостью, между плоскостями с применением координатного метода» раздела 2.</p>
Тема 2.2 Решение задач по нахождению расстояний от точки до прямой, от точки до плоскости, расстояний между прямыми, между прямой и плоскостью, между плоскостями с применением координатного метода	Лекция, 2 часа	<p>Расстояние от точки до прямой, от точки до плоскости, между двумя прямыми, от прямой до плоскости, между двумя плоскостями</p>
	Практическое занятие, 4 часа	<p>Цель: формирование умений: применять элементы векторной алгебры и аналитической геометрии при доказательстве утверждений и при решении заданий по стереометрии с развернутым ответом повышенного уровня сложности; составлять дифференцируемые по уровням сложности фрагменты диагностической работы, на примере решаемых заданий – применение координатного метода в задачах стереометрии на нахождение расстояний.</p> <p>Индивидуальная работа слушателя: решение задач повышенного уровня сложности на нахождение расстояний между пространственными объектами координатным методом.</p> <p>Работа в малых группах: проектирование заданий диагностической работы по теме «Решение задач нахождения расстояний от точки до прямой, от точки до плоскости, расстояний между прямыми, между прямой и плоскостью, между плоскостями с применением координатного метода» раздела 2.</p> <p>Совместное подведение итогов работы.</p>
	Самостояте	Отработка навыков решения задач повышенного

	льная работа, 4 часа	уровня сложности на нахождение расстояний между пространственными объектами координатным методом Контрольная работа № 6 по теме 2.2. Проектирование заданий проекта: разработка заданий диагностических работ базового и продвинутого уровней сложности и их развернутое решение по теме «Решение задач нахождения расстояний от точки до прямой, от точки до плоскости, расстояний между прямыми, между прямой и плоскостью, между плоскостями с применением координатного метода» раздела 2.
Раздел 3. Задания экономического содержания и на оптимальный выбор		
Тема 3.1 Решение задач экономического содержания, задач на оптимальный выбор, относящихся к заданиям повышенного уровня сложности с развернутым ответом	Лекция, 2 часа	Основные типы задач экономического содержания, задач на оптимальный выбор. Составление математической модели задачи, исследование составленной модели. Требования к оформлению решения заданий повышенного уровня сложности с развернутым ответом
	Практическое занятие, 4 часа	Цель: формирование умений: строить и исследовать математические модели при решении задач экономического содержания, задач на оптимальный выбор с развернутым ответом повышенного уровня сложности; составлять дифференцируемые по уровням сложности фрагменты диагностической работы, на примере решаемых заданий – задач экономического содержания, задач на оптимальный выбор. Работа в малых группах: - построение и исследование математической модели при решении задач экономического содержания, задач на оптимальный выбор, соответствующих заданиям с развернутым ответом повышенного уровня сложности; - проектирование заданий диагностической работы по теме «Решение задач экономического содержания, задач на оптимальный выбор, относящихся к заданиям повышенного уровня сложности с развернутым ответом» раздела 3. Совместное подведение итогов работы.
	Самостоятельная работа, 3 часа	Отработка навыков решения задач экономического содержания, задач на оптимальный выбор, соответствующих заданиям с развернутым ответом повышенного уровня сложности. Контрольная работа № 6 по теме 3.1. Проектирование заданий проекта: разработка заданий диагностических работ базового и продвинутого уровней сложности и их развернутое решение по теме «Решение задач экономического содержания, задач на оптимальный выбор, относящихся к заданиям повышенного уровня сложности с развернутым ответом» раздела 3

Раздел 4. Диагностические работы		
Тема 4.1 Составление дифференцированных по уровню сложности диагностических работ по темам алгебры и геометрии	Лекция, 1 часа	Критерии определения уровня сложности заданий по математике. Методика составления дифференцированных по уровню сложности диагностических работ по алгебре и геометрии
	Практическое занятие, 2 час	Цель: формирование умения составлять и решать дифференцированные по уровням сложности диагностические работы по темам алгебры и геометрии. Работа в группах: определение уровня сложности заданий в соответствии с критериями, составление и решение дифференцированных по уровням сложности диагностических работ по темам разделов 1-3. Обсуждение вариантов решений и подходов. Совместное подведение итогов.
	Самостоятельная работа, 4 часа	Совершенствование навыков определения уровня сложности заданий в соответствии с критериями, составления и решения дифференцированных по уровням сложности диагностических работ по темам разделов 1-3. Проект: составление дифференцированных по уровню сложности диагностических работ по алгебре и геометрии (по темам разделов 1-3)
Выходное (итоговое) тестирование	Практическое занятие, 2 часа	Итоговый тест
Итоговая аттестация		Зачет по совокупности выполненных контрольных работ №№1-6, выходного (итогового) тестирования и проекта

Раздел 3. «Формы аттестации и оценочные материалы»

3.1 Текущий контроль

Программой предусмотрены: входное тестирование, контрольные работы №№ 1-6 по темам разделов 1-3, проект «Диагностическая работа», выходное (итоговое) тестирование.

3.1.1. Входная практическая работа

В ходе курса слушатели проходят входную практическую работу, направленную на определение уровня сформированности компетенций ОПК-8, и выявление проблемных зон слушателей. Входное тестирование не подвергается оцениванию.

Варианты заданий входной практической работы

1. Решите уравнение:

$$\frac{(x-2)^2}{2} + \frac{18}{(x-2)^2} = 7 \left(\frac{x-2}{2} - \frac{3}{x-2} \right) + 10$$

Найдите его корни, принадлежащие отрезку $[-2; 2]$.

2. Решите неравенство:

$$25x^2 - 4|8 - 5x| < 80x - 64.$$

3. Решить систему:

$$\begin{cases} \frac{5x-4y}{4} - 1 = 2x + 2 \\ \frac{3x-2y}{3} + 2 = 3x - 2 \end{cases}$$

Требования к выполнению входной практической работы

Входная практическая работа выполняется на первой учебной неделе курса во время практического занятия.

Критерии оценивания и оценивание входной практической работы:

входная практическая работа не подвергается оценивания.

3.1.2. Контрольные работы №№ 1-6

Варианты заданий контрольной работы № 1 с решениями

1. Найти все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $\sqrt{x-8} = 3a - ax + 2$ имеет единственное решение.

Решение

Сделаем замену переменных: $\sqrt{x-8} = t$ ($t \geq 0$). Тогда $x = t^2 + 8$ и данное уравнение примет вид

$$t = 3a - a(t^2 + 8) + 2;$$

$$at^2 + t + 5a - 2 = 0.$$

Далее необходимо найти все значения параметра a , при которых полученное уравнение имеет единственное неотрицательное решение.

Возможны следующие случаи.

1) Если $a = 0$, то получим линейное уравнение, которое имеет единственное решение $t = 2$, а значит, исходное уравнение имеет единственное решение $x = 10$.

2) Если $a \neq 0$ и квадратное уравнение имеет два корня, один из которых неотрицательный, а второй отрицательный, то есть корни разных знаков. В этом случае должны выполняться следующие условия:

$$\begin{cases} D > 0, \\ t_1 t_2 \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 - 4a(5a - 2) > 0, \\ \frac{5a - 2}{a} \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 20a^2 - 8a - 1 < 0, \\ a \in (0; \frac{2}{5}] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \in (-0,1; 0,5), \\ a \in (0; 0,4] \end{cases} \Rightarrow a \in (0; 0,4].$$

Заметим, что при $a = 0,4$ получим два корня, $t_1 = 0$ и $t_2 = -5/2$, которые удовлетворяют условию задачи.

3) Если $a \neq 0$ и уравнение имеет одно неотрицательное решение. В этом случае должны выполняться следующие условия:

$$\begin{cases} D = 0, \\ t \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -0,1; a = 0,5, \\ \frac{-1}{2a} \geq 0 \end{cases} \Rightarrow a = -0,1.$$

Ответ: $a \in \{-0,1\} \cup [0; 0,4]$.

2. При всех значениях параметра a решить неравенство $\sqrt{x+a} \geq x+1$.

Решение

Данное неравенство равносильно совокупности двух систем:

$$\sqrt{x+a} \geq x+1 \Leftrightarrow \begin{cases} x+a \geq 0, \\ x+1 < 0, \\ x+1 \geq 0, \\ x+a \geq (x+1)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq -a, \\ x < -1, \\ x \geq -1, \\ x^2 + x - a + 1 \leq 0. \end{cases}$$

Очевидно, что первая система совокупности имеет решения, если $a > 1$. В этом случае $x \in [-a; -1)$.

Вторая система имеет решения, если второе неравенство этой системы имеет решения, принадлежащие интервалу $[-1; +\infty)$.

Решим неравенство

$$x^2 + x - a + 1 \leq 0.$$

Так как коэффициент перед x^2 положительный, то ветви параболы направлены вверх, а значит, данное неравенство имеет решения, если дискриминант квадратного уравнения $x^2 + x - a + 1 = 0$ неотрицательный, то есть

$$D = 1 - 4(1 - a) = 4a - 3 \geq 0 \Rightarrow a \geq 3/4,$$

Тогда решением неравенства будет интервал $\left[\frac{-1 - \sqrt{4a - 3}}{2}; \frac{-1 + \sqrt{4a - 3}}{2} \right]$.

Рассмотрим 2 случая.

1) Пусть $a \in [3/4; 1]$. Тогда первая система совокупности не имеет решений.

Вопрос о решении второй системы сводится к исследованию расположения числа

-1 относительно отрезка $\left[\frac{-1 - \sqrt{4a - 3}}{2}; \frac{-1 + \sqrt{4a - 3}}{2} \right]$.

Так как $3/4 \leq a \leq 1$, то $0 \leq 4a - 3 \leq 1$, тогда $-1 \leq \frac{-1 - \sqrt{4a - 3}}{2}$, и решением

совокупности будет отрезок $\left[\frac{-1 - \sqrt{4a - 3}}{2}; \frac{-1 + \sqrt{4a - 3}}{2} \right]$.

2) Пусть $a > 1$, тогда $\frac{-1 - \sqrt{4a - 3}}{2} < -1 < \frac{-1 + \sqrt{4a - 3}}{2}$, и решением второй

системы будет отрезок $\left[-1; \frac{-1 + \sqrt{4a - 3}}{2} \right]$. Решением первой системы будет

интервал $[-a; -1)$. Значит, в этом случае решением неравенства будет отрезок

$$\left[-a; \frac{-1 + \sqrt{4a-3}}{2}\right].$$

$$\text{Ответ: } \begin{cases} x \in \left[\frac{-1 - \sqrt{4a-3}}{2}; \frac{-1 + \sqrt{4a-3}}{2}\right], & \text{если } a \in [3/4; 1], \\ x \in \left[-a; \frac{-1 + \sqrt{4a-3}}{2}\right], & \text{если } a \in (1; +\infty), \\ \emptyset, & \text{если } a \in (-\infty; 3/4). \end{cases}$$

Варианты заданий для контрольной работы № 2 с решениями

1. Найти все значения параметра a , при которых уравнение $\sqrt{x^4 - 2x^2\sqrt{x^2 + x^2} + 1 - x^2} + a - ax^2 = 0$ имеет ровно четыре решения.

Решение

Заметим, что при $x = \pm 1$ исходное уравнение превращается в истинное тождество, а значит, $x = \pm 1$ является решением данного уравнения при любом значении параметра a .

Выразим из уравнения параметр a :

$$a = \frac{\sqrt{x^4 - 2x^2\sqrt{x^2 + x^2} + 1 - x^2}}{x^2 - 1}.$$

Далее найдем те значения параметра a , при которых полученное уравнение имеет ровно два решения.

Упростим полученное выражение;

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{x^4 - 2x^2\sqrt{x^2 + x^2} + 1 - x^2}}{x^2 - 1} &= \frac{\sqrt{x^4 - 2x^2|x| + x^2} + 1 - x^2}{x^2 - 1} = \frac{\sqrt{x^2(x^2 - 2|x| + 1)} + 1 - x^2}{x^2 - 1} = \\ &= \frac{\sqrt{x^2(|x| - 1)^2 - (x^2 - 1)}}{x^2 - 1} = \frac{|x||x| - 1}{x^2 - 1} - 1. \end{aligned}$$

Так функция $f(x) = \frac{|x||x| - 1}{x^2 - 1} - 1$ — четная, то ее график симметричен относительно оси OY . Поэтому построим график данной функции на интервале $[0; +\infty)$, а затем отобразим его симметрично на интервал $(-\infty; 0)$.

Заметим, что прямая $x = 1$ – вертикальная асимптота. Тогда при $x \geq 0$ и $x \neq 1$

$$\text{имеем } f(x) = \frac{x|x-1|}{x^2-1} - 1 = \begin{cases} \frac{x(x-1)}{x^2-1} - 1, x \in (1; +\infty); \\ -\frac{x(x-1)}{x^2-1} - 1, x \in (0; 1) \end{cases} = \begin{cases} \frac{x}{x+1} - 1, x \in (1; +\infty); \\ -\frac{x}{x+1} - 1, x \in (0; 1) \end{cases} = \begin{cases} -\frac{1}{x+1}, x \in (1; +\infty); \\ \frac{1}{x+1} - 2, x \in (0; 1). \end{cases}$$

Значение функции при $x = 0$ равно $f(0) = -1$. Строим график (рис.3.1.):

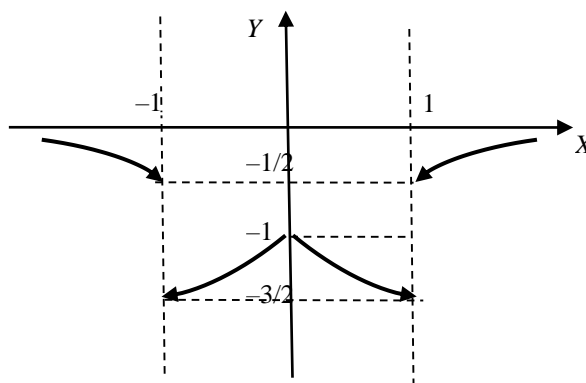


рис. 3.1.

График функции $y_1 = a$, при каждом значении параметра a , представляет собой прямую, параллельную оси OX . Тогда число решений уравнения $\frac{|x||x-1|}{x^2-1} - 1 = a$ совпадает с числом пересечений графиков $y_1 = a$ и $y = \frac{|x||x-1|}{x^2-1} - 1$.

Анализируя графики на рисунке 3.1, получаем, что уравнение $\frac{|x||x-1|}{x^2-1} - 1 = a$ имеет ровно два различных решения, если $a \in (-1,5; -1) \cup (-0,5; 0)$. Тогда при этих значениях параметра a уравнение $\sqrt{x^4 - 2x^2\sqrt{x^2 + x^2} + 1 - x^2} + a - ax^2 = 0$ имеет четыре решения.

Ответ: $a \in (-1,5; -1) \cup (-0,5; 0)$.

Варианты заданий для контрольной работы № 3 с решениями

1. Найти все значения параметра a , при которых уравнение $8|ax-1| = 9ax^2 + 16(3-a)x + 8$ имеет единственное решение.

Решение

Преобразуем правую часть уравнения:

$$9ax^2 + 16(3-a)x + 8 = 9ax^2 + 48x - 16ax + 8 = 9ax^2 - 9x + 57x - 16ax + 16 - 8 =$$

$$= 9x(ax-1) + 57x - 16(ax-1) - 8 = (ax-1)(9x-16) + 57x - 8.$$

Тогда получим следующее уравнение:

$$8|ax-1| = (ax-1)(9x-16) + 57x - 8$$

Заметим, что при $a = 0$ уравнение имеет вид: $8 = 48x + 8$, а значит, оно имеет единственное решение $x = 0$.

Пусть $a \neq 0$, тогда, сделаем замену $ax - 1 = t$. Выразим x : $x = \frac{t+1}{a}$ и

подставим его в уравнение:

$$8|t| = t \left(9 \frac{t+1}{a} - 16 \right) + 57 \frac{t+1}{a} - 8.$$

Умножим правую и левую части уравнения на a :

$$8a|t| = t(9(t+1) - 16a) + 57(t+1) - 8a;$$

$$8a|t| + 8a + 16at = 9t^2 + 9t + 57t + 57.$$

Выразим из полученного уравнения a :

$$a = \frac{9t^2 + 9t + 57t + 57}{8|t| + 8 + 16t} = \frac{3}{8} \frac{3t^2 + 22t + 19}{|t| + 1 + 2t} = \frac{3}{8} \frac{(3t+19)(t+1)}{|t| + 1 + 2t}.$$

Построим график функции $y = \frac{3}{8} \frac{(3t+19)(t+1)}{|t| + 1 + 2t}$.

Раскроем модуль.

$$y = \begin{cases} \frac{3}{8} \frac{(3t+19)(t+1)}{1+3t}, & t \geq 0; \\ \frac{3}{8} \frac{(3t+19)(t+1)}{1+t}, & t < 0. \end{cases} \Rightarrow y = \begin{cases} \frac{3}{8} \frac{(3t+19)(t+1)}{1+3t}, & t \geq 0; \\ \frac{3}{8} (3t+19), & t < 0, t \neq -1. \end{cases}$$

Рассмотрим функцию

$$y = \frac{3}{8} \frac{(3t+19)(t+1)}{1+3t}, t \geq 0.$$

Найдем нули ее первой производной:

$$y' = \frac{3}{8} \frac{(6t+22)(3t+1) - 3(3t^2+22t+19)}{(1+3t)^2} = 0.$$

Заметим, что при $t \geq 0$ знаменатель не обращается в ноль. Найдем нули числителя:

$$(6t + 22)(3t + 1) - 3(3t^2 + 22t + 19) = 18t^2 + 66t + 6t + 22 - 9t^2 - 66t - 57 = 0;$$

$$9t^2 + 6t - 35 = 0.$$

Корни квадратного уравнения: $t = -7/3$ (посторонний корень, так как $t \geq 0$) и $t = 5/3$.

Найдем знаки первой производной при $t \geq 0$ (рис.3.2).

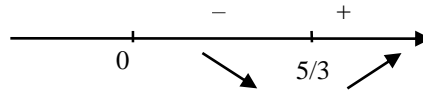


рис.3.2

Итак, функция убывает на интервале $(0; 5/3)$, а возрастает на интервале $(5/3; +\infty)$.

Найдем значения функции в точке $t = 5/3$ и в точке $t = 0$:

$$y(5/3) = 4, \quad y(0) = 57/8.$$

Получили, что точка $(5/3; 4)$ – точка минимума функции.

При $t < 0$, график функции – прямая $y = \frac{3}{8}(3t + 19)$ с выколотой точкой $(-1; 6)$.

Построим график функции (рис.3.3).

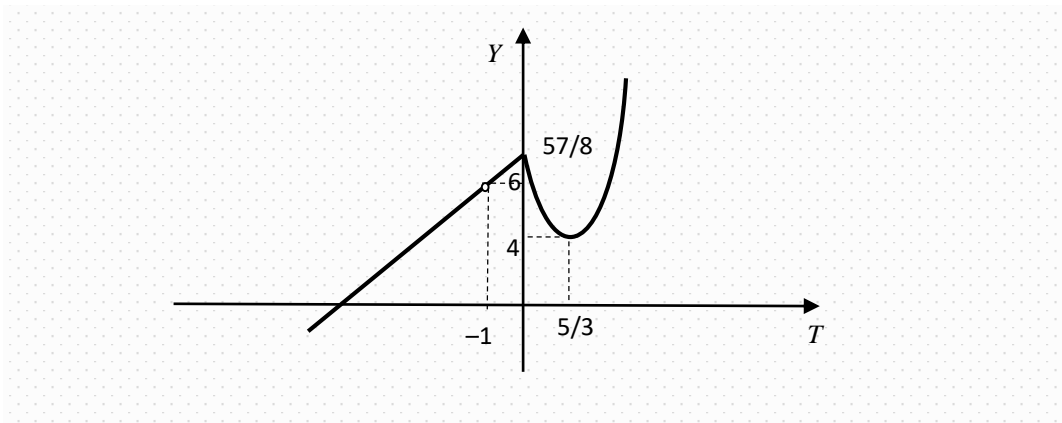


рис. 3.3.

График функции $y_1 = a$ ($a \neq 0$), при каждом значении параметра a , представляет собой прямую, параллельную оси OT . Число решений уравнения совпадает с числом пересечений графиков $y_1 = a$ ($a \neq 0$) и $y = \frac{3}{8} \frac{(3t + 19)(t + 1)}{|t| + 1 + 2t}$.

Анализируя графики на рисунке 3.3, получаем, что уравнение $a = \frac{3(3t+19)(t+1)}{8|t|+1+2t}$

имеет единственное решение, если

$$a \in (-\infty; 0) \cup (0; 4) \cup (57/8; +\infty).$$

Тогда уравнение $8|ax-1| = 9ax^2 + 16(3-a)x + 8$ имеет единственное решение, если $a \in (-\infty; 4) \cup (57/8; +\infty)$.

Ответ: $a \in (-\infty; 4) \cup (57/8; +\infty)$.

Варианты заданий для контрольной работы № 4 без решений

1. Найти все значения параметра a , при каждом из которых неравенство $x^2 + 2|x-a| \geq a^2$ справедливо для всех действительных x .

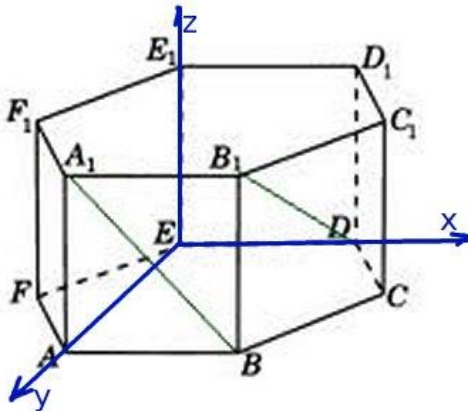
2. Найдите все значения параметра a , при которых решением неравенства $|3-4x|\sqrt{x-x^2} \geq (2ax+0,5-a)|3-4x|$ является отрезок длиной 0,5.

Варианты заданий для контрольной работы № 5

1. В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ $AA_1 = 3$; $AD = 2$; $AB = 4$ и точка E – середина ребра BC . Найдите угол между прямыми B_1E и A_1C_1 .

2. В правильной шестиугольной призме $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$, все ребра которой равны 1, найти косинус угла между прямыми BA_1 и DB_1 .

Решение



$$A_1(0; \sqrt{3}; 1) \quad B(1; \sqrt{3}; 0) \quad D(1; 0; 0) \quad B_1(1; \sqrt{3}; 1)$$

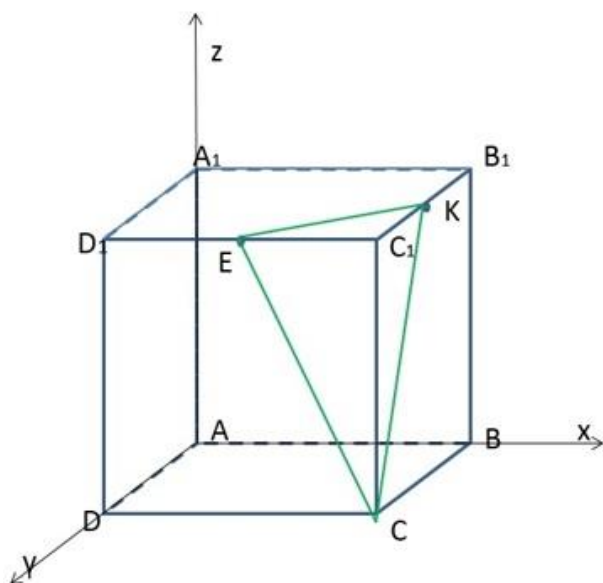
$$\overrightarrow{A_1B}(1; 0; -1) \quad \overrightarrow{B_1D}(0; -\sqrt{3}; -1)$$

$$\cos \beta = \left| \frac{1 \times 0 + 0 \times (-\sqrt{3}) + (-1) \times (-1)}{\sqrt{(-1)^2 + 0^2 + (-1)^2} \sqrt{0^2 + (-\sqrt{3})^2 + (-1)^2}} \right| = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

Варианты заданий для контрольной работы № 6

1. Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ с ребром 4. Найти расстояние от точки A до плоскости EKC , где E – середина $D_1 C_1$, K – середина $C_1 B_1$.

Решение



$$A(0; 0; 0) \quad C(4; 4; 0) \quad E(4; 2; 4) \quad K(2; 4; 4)$$

Напишем уравнение плоскости EKC :

$$\begin{cases} 4A + 2B + 4C + D = 0 \\ 2A + 4B + 4C + D = 0 \\ 4A + 4B + D = 0 \end{cases} \begin{cases} A = 2 \\ B = 2 \\ C = 1 \\ D = -16 \end{cases}$$

Уравнение плоскости имеет вид: $2x + 2y + z - 16 = 0$

Расстояние от точки A до плоскости : $d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$

$$d = \frac{|16|}{\sqrt{4 + 4 + 1}} = \frac{16}{3} = 5 \frac{1}{3}$$

2. Дана правильная треугольная призма $ABCA_1 B_1 C_1$, ребра которой равны 2. Точка E – середина ребра CC_1 . Найдите расстояние между прямыми AB_1 и BE .

Требования к выполнению контрольных работ №№1-6

Контрольные работы выполняются слушателем на листах формата А4. Обязательным является наличие титульного листа.

Контрольные работы №№1-4 включают 4 задания, соответствующие заданиям высокого уровня сложности по математике.

Контрольные работы №№5-6 включают 4 задания, соответствующие заданиям повышенного уровня сложности по математике.

Решение заданий контрольной работы должно быть развернутым, т.е. полным и обоснованным.

При решении заданий контрольных работ №№1-4 (при необходимости) слушатель может сопровождать аналитическое решение графическими комментариями.

При решении заданий контрольных работ №№5-6 необходимо приводить общую формулу применительно к конкретной задаче и только после этого производить вычисления.

Критерии оценивания контрольных работ №№1-6

Для оценки заданий контрольных работ №№ 1-6 применяются критерии, аналогичные критериям оценки соответствующих заданий с развернутым ответом ЕГЭ по математике.

Каждый номер контрольных работ №№ 1-3 оценивается 0, 1, 2, 3 или 4 баллами. Максимальный балл за одну из контрольных работ №№ 1-3 составляет 16 баллов.

Каждый номер контрольных работ №№ 4-5 оценивается 0, 1 или 2 баллами. Максимальный балл за одну из контрольных работ №№ 4-5 составляет 8 баллов.

Каждый номер контрольной работы № 6 оценивается 0, 1, 2 или 3 баллами. Максимальный балл – 12 баллов.

Таким образом, максимальная оценка за все контрольные работы составляет 76 баллов.

Оценивание контрольных работ №№1-6: количество баллов, полученное на контрольную работу.

3.1.3 Проект «Диагностическая работа»

Варианты заданий к проекту

Базовый уровень

1. Решите уравнение:

$$18x^4 - 3x^3 - 25x^2 + 2x + 8 = 0$$

2. Решите неравенство:

$$\frac{2x^2 - 2x}{x^2 - x + 1} < \frac{2x^2 - 2x - 2}{x^2 - x - 2} - 1$$

3. Решите уравнение:

$$|x^2 + 3x - 20| = |x^2 - 3x + 2|$$

4. Решите неравенство:

$$3|x + 3| - 3x \leq 14 - |2 - x|.$$

5. Решите уравнение:

$$\sqrt{2x - 3} + \sqrt{4x + 1} = 4$$

6. Решите неравенство:

$$\sqrt{x^2 - x + 2} > \sqrt{x + 1}$$

7. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} 6x^2 + 17xy + 7y^2 = a, \\ \log_{2x+y}(3x + 7y) = 3. \end{cases}$$

8. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\sin 2x + \cos x}{\sqrt{y-1}} = 0, \\ y = 4 \sin x + 3. \end{cases}$$

Требования к выполнению проекта

Проект выполняется слушателем (группой численностью не более 3-х слушателей) на листах формата А4. Обязательно наличие титульного листа.

Выполнение проекта предусматривает составление двух вариантов диагностической работы, соответствующих двум уровням сложности. Каждый вариант должен содержать по два задания по каждой из тем разделов 1-3.

Критерии оценивания

+	Оба варианта диагностической работы соответствуют критериям уровня сложности заданий	24 балла
+ / -	Имеются единичные несоответствия критериям уровня сложности заданий в одном варианте	20 баллов
- / +	Имеются единичные несоответствия критериям уровня сложности заданий в двух вариантах	16 баллов
-	Имеются многочисленные несоответствия критериям уровня сложности заданий	12 баллов

Максимальный балл за проект – 24 балла.

3.1.4. Выходное (итоговое) тестирование

В ходе завершения курса слушатели проходят выходное тестирование, направленное на определение уровня сформированности компетенций ОПК-8. Итоговый тест содержит 7 заданий, из них 5 заданий базового уровня и 2 задания продвинутого уровня. Выходное тестирование подвергается оцениванию.

Варианты тестовых заданий для выходного тестирования с решениями

1. Решите уравнение:

$$18x^4 - 3x^3 - 25x^2 + 2x + 8 = 0$$

Решение:

$$18x^4 - 3x^3 - 25x^2 + 2x + 8 = 0 \quad | : x^2 \neq 0$$

$$18x^2 - 3x - 25 + \frac{2}{x} + \frac{8}{x^2} = 0, \quad 18\left(x^2 + \frac{4}{x^2}\right) - 3\left(x - \frac{2}{x}\right) - 25 = 0,$$

$$x - \frac{2}{x} = t, \quad x^2 + \frac{4}{x^2} = t^2 + \frac{4}{3}; \quad 18t^2 - 3t - 1 = 0, \quad t_1 = \frac{-1}{6}, \quad t_2 = \frac{1}{3};$$

$$x - \frac{2}{x} = \frac{-1}{6}, \quad x - \frac{2}{x} = \frac{1}{3}; \quad x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{97}}{12}, \quad x_3 = \frac{-2}{3}, \quad x_4 = 1;$$

Ответ: $x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{97}}{12}$, $x_3 = \frac{-2}{3}$, $x_4 = 1$.

2. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} 3|x| + 2y = 1, \\ 2|x| - y = 3; \end{cases}$$

Решение:

Можно сделать замену $|x| = t$ и выйти на систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} 3t + 2y = 1, \\ 2t - y = 3; \end{cases}$$

Приведем решение без замены.

Выражаем y из второго уравнения системы и **подставляем** в первое.

$$\begin{cases} 3|x| + 2(2|x| - 3) = 1, \\ y = 2|x| - 3; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 7|x| = 7, \\ y = 2|x| - 3; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \pm 1, \\ y = 2 \cdot 1 - 3; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \pm 1, \\ y = -1; \end{cases}$$

Ответ: $(1; -1), (-1; -1)$.

3. Решите неравенство:

$$\frac{2x^2 - 2x}{x^2 - x + 1} < \frac{2x^2 - 2x - 2}{x^2 - x - 2} - 1$$

Решение:

$$t = x^2 - x$$

Тогда наше неравенство принимает вид:

$$\frac{2t}{t+1} < \frac{2t-2}{t-2} - 1$$

Такое мы решать уже умеем:

$$\begin{aligned} \frac{2t^{t-2}}{t+1} - \frac{2(t-1)^{t+1}}{2t^2 - 4t - 2} + 1^{(t-2)(t+1)} < 0 &\Leftrightarrow \\ \frac{t-2}{2t^2 - 4t - 2} + 1^{(t-2)(t+1)} < 0 &\Leftrightarrow \\ \frac{t-2}{(t+1)(t-2)} < 0 &\Leftrightarrow \\ \frac{t^2 - 5t}{(t+1)(t-2)} < 0 &\Leftrightarrow \\ \frac{t(t-5)}{(t+1)(t-2)} < 0 \end{aligned}$$

$$t \in (-1; 0) \cup (2; 5)$$

Не забываем вернуться к начальной переменной – x . Для этого нужно переписать полученное решение для t в виде неравенств:

$$t \in (-1; 0) \cup (2; 5) \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} t > -1 \\ t < 0 \\ t > 2 \\ t < 5 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} x^2 - x > -1 \\ x^2 - x < 0 \\ x^2 - x > 2 \\ x^2 - x < 5 \end{array} \right. \Leftrightarrow \end{array} \right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} x^2 - x + 1 > 0 \text{ — корней нет } \Rightarrow \text{ выполняется при всех } x \\ x^2 - x < 0 \Leftrightarrow x(x-1) < 0 \Leftrightarrow x \in (0; 1) \\ x^2 - x - 2 > 0 \Leftrightarrow (x-2)(x+1) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -1) \cup (2; +\infty) \\ x^2 - x - 5 < 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{1-\sqrt{21}}{2}\right) \left(x - \frac{1+\sqrt{21}}{2}\right) < 0 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x \in (0; 1) \\ \left\{ \begin{array}{l} (x-2)(x+1) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -1) \cup (2; +\infty) \\ \left(x - \frac{1-\sqrt{21}}{2}\right) \left(x - \frac{1+\sqrt{21}}{2}\right) < 0 \Leftrightarrow x \in \left(\frac{1-\sqrt{21}}{2}; \frac{1+\sqrt{21}}{2}\right) \end{array} \right. \end{array} \right.$$

$$4 < \sqrt{21} < 5$$

$$-5 < -\sqrt{21} < -4$$

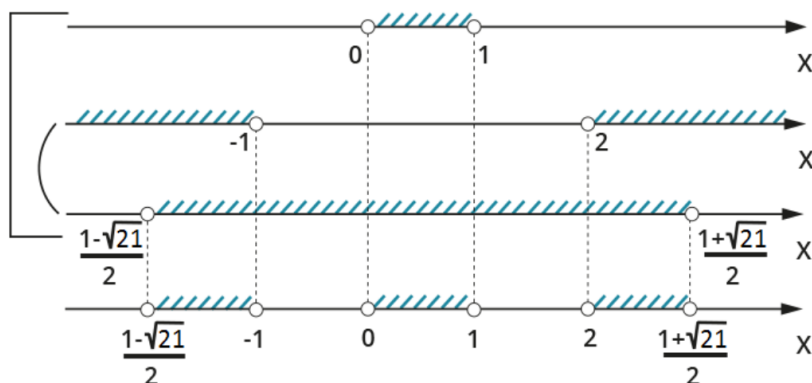
$$-4 < 1 - \sqrt{21} < -3$$

$$-2 < \frac{1 - \sqrt{21}}{2} < -\frac{3}{2}$$

$$4 < \sqrt{21} < 5$$

$$5 < 1 + \sqrt{21} < 6$$

$$\frac{5}{2} < \frac{1 + \sqrt{21}}{2} < 3$$



$$x \in \left(\frac{1 - \sqrt{21}}{2}; -1 \right) \cup (0; 1) \cup \left(2; \frac{1 + \sqrt{21}}{2} \right)$$

Требования к выполнению итогового теста

Итоговый тест выполняется в виде письменной работы после сдачи проекта.

Выполнение каждого задания предполагает развернутое решение с ответом.

Критерии оценивания итогового теста:

Итоговый тест зачитывается, если:

- а) верно выполнено не менее 3-х заданий базового уровня и 1-го задания продвинутого уровня;
- б) верно выполнено 5 заданий базового уровня;
- в) верно выполнено не менее 2-х заданий базового уровня и 2-х заданий продвинутого уровня.

оценивание итогового теста: зачет / незачет

3.2 Итоговая аттестация

Итоговая аттестация – зачет как совокупность выполненных контрольных работ №№-1-6, проекта и заченного выходного (итогового) тестирования.

Итоговая аттестация осуществляется на основании полученных совокупных баллов за контрольные работы №№1-6 и проект, а также зачетного итогового теста. Зачет ставится, если по результатам выполнения контрольных работ №№1-6 и проекта слушатель набрал не менее 70 баллов, а по итоговому тесту получено зачтено.

Оценивание: зачет/незачет

Раздел 4. «Организационно-педагогические условия реализации программы»

4.1 Учебно-методическое обеспечение и информационное обеспечение программы

4.1.1 Основная литература

1. Высоцкий И.Р., Кукса Е.А., Семенов А.В., Трепалин А.С., Яценко И.В. Математика. Решение заданий повышенного и высокого уровня сложности. Как получить максимальный балл на ЕГЭ: учебное пособие. – М.: Интеллект-Центр, 2021. – 143 с.

2. Гордин Р.К. ЕГЭ 2019. Математика. Геометрия. Стереометрия. Задача 14 (профильный уровень). Москва: МЦНМО, 2019. — 144 с.

3. Ерина Т.М., ЕГЭ 2019. 100 баллов. Математика. Профильный уровень. Практическое руководство / Т.М. Ерина. – Издательство «Экзамен», 2019. – 350 с.

4. Киселев А.П. Геометрия: Планиметрия. Стереометрия. Москва: Ленанд, 2020 - 360с.

5. Математика. ЕГЭ. Задача с экономическим содержанием: учебно-методическое пособие / Под ред. Ф.Ф. Лысенко и С.Ю. Кулабухова. – Изд. 4-е, перераб. и доп. – Ростов н/Д: Легион, 2019. – 128 с. – (ЕГЭ).

6. Мордкович А.Г. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс. Учебник для общеобразовательных организаций (базовый и углубленный уровни). В 2 ч. Ч. 1 / А.Г. Мордкович, П.В. Семенов. – 6-е изд., перераб. – М. : Мнемозина, 2022. – 583 с.: ил.

4.1.2 Дополнительная литература

1. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс. Учебник для общеобразовательных организаций (базовый и углубленный уровни). В 2 ч. Ч. 2 / [А.Г. Мордкович и др.] – 5-е изд., перераб. – М.: Мнемозина, 2017. – 264 с.: ил.

2. Асмолов А.Г. Формирование универсальных учебных действий в основной школе: от действия к мысли: пособие для учителя. – М.: Просвещение, 2011.

3. Виленкин Н.Я., Шибасов Л.П. За страницами учебника математики. Арифметика, алгебра, геометрия: книга для учащихся 10–11 классов. – М.: Просвещение, 2010.

4. Виленкин Н. Я. Алгебра и математический анализ для 10–11 классов: учебное пособие для учащихся классов и школ с углубленным изучением математики. – М.: Просвещение, 2010.

5. Высоцкий В.С. Задачи с параметром при подготовке к ЕГЭ. М.: Научный мир, 2011. – 316 с: 262 ил.

6. Никольский С.М., Потапов М.К., Решетников Н.Н., Шевкин А.В. Алгебра и начала математического анализа: учебник для 10, 11 классов. – М.: Просвещение, 2008.

7. Захаров П.И., Семенов А.В., Трепалин А.С., Яценко И.В. Оптимальный банк заданий для подготовки к ЕГЭ. Единый государственный экзамен 2015. Математика: учебное пособие. – М.: Интеллект-Центр, 2015.

Интернет-источники:

1. Образовательный портал «Решу ЕГЭ». – URL: <https://math-ege.sdangia.ru/>, дата обращения: 25.03.2023

4.2 Материально-технические условия реализации программы

Для проведения очных занятий и итоговой аттестации используются учебные аудитории с меловой или маркерной доской, а также компьютерный класс с возможностью выхода в Интернет.

4.3 Кадровые условия реализации программы

Для реализации программы приглашается профессорско-преподавательский состав университета.